

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ

par

BAUSSART NORBERT

*

ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA REFLEXION
DU FOND MARIN SUR L'INTERPRETATION DE
L'ALBEDO DE RETRODIFFUSION DE L'OCEAN



D 030 059600 8

Soutenue le 13/2/1980 devant la Commission d'examen

Membres du Jury

M. ^{me} J. LENOBLE	<i>Président</i>
M. ^r P.Y. DESCHAMPS	<i>Rapporteur</i>
M. ^r M. HERMAN	<i>Examineur</i>
M. ^r A. RICHARD	<i>Membre invité</i>

A ma Femme
A mes Parents

Ce travail a été effectué sous la direction de Monsieur DESCHAMPS, au Laboratoire d'Optique Atmosphérique de Lille, dirigé par Madame LENOBLE, professeur. Que tous deux reçoivent ici l'expression de mes sentiments de profonde gratitude.

Je tiens à remercier Madme LENOBLE qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury, ainsi que Monsieur HERMAN, professeur, qui a accepté d'y participer.

Monsieur RICHARD, professeur, a accepté de juger mon travail, témoignant ainsi de l'intérêt qu'il porte aux travaux du Laboratoire.

Je remercie tout particulièrement Monsieur VIOLLIER, pour sa compréhension et son aide constante.

Je remercie tous les chercheurs du Laboratoire d'Optique Atmosphérique : sans leur expérience ce travail n'aurait pu être accompli.

Je remercie également Mademoiselle DEROO, Monsieur CALLIGRAFI, et surtout Monsieur GONZALES pour leur aide précieuse pour tous les traitements numériques, ainsi que Madame THEROUX qui a accepté de taper ce mémoire.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

1ère PARTIE - ETUDE THEORIQUE DE L'ALBEDO DE RETRODIFUSION D'UN MILIEU HOMOGENE, FINI VERTICALEMENT, LIMITE PAR UN FOND LAMBERTIEN.

I - INTRODUCTION

II - RAPPELS

II-1 - Propriétés optiques du milieu

II-2 - Résolution de l'équation de transfert

III - CAS D'UN MILIEU SEMI-INFINI, HOMOGENE VERTICALEMENT

III-1 - Résultats antérieurs à cette étude

III-2 - Résultats de cette étude

III-3 - Discussion

IV - ALBEDO $A^-(\tau)$ D'UN MILIEU FINI VERTICALEMENT LIMITE PAR UN FOND NOIR

IV-1 - Recherche d'une formulation analytique approchant $A^-(\tau)$

IV-2 - Variations de K/C avec τ

IV-3 - Valeur moyenne de K/C

IV-4 - Paramétrisation de la moyenne $\langle K/C \rangle$

V - ALBEDO $A^-(\tau, \rho)$ D'UN MILIEU FINI LIMITE PAR UN FOND LAMBERTIEN

V-1 - Résultats antérieurs

V-2 - Simulations effectuées

V-3 - L'albédo $A^-(\tau, \rho)$ varie non linéairement avec la réflectance ρ du fond

a) Etude de la fonction $A^-(\tau)$

b) Calcul de $T^-(\tau)$ et $\langle K^-/C \rangle$

c) Validité de cette approximation

V-4 - L'albédo $A^-(\tau, \rho)$ varie linéairement avec ρ

V-5 - Représentation de l'albédo $A^-(\tau, \rho)$

VI - ALBEDO $A^+(\tau, \rho)$ EN PRESENCE DE L'INTERFACE EAU/AIR

VI-1 - Etude de l'effet d'interface

VI-2 - Albédo $A^+(\tau)$ d'un milieu fini limité par un fond noir

VI-3 - Albédo $A^+(\tau, \rho)$ d'un milieu fini limité par un fond lambertien
VII - CONCLUSION

IIème PARTIE - INTERPRETATION DE L'ALBEDO DE RETRODIFFUSION DE LA MER, EN
PRESENCE D'UN FOND REFLECHISSANT A UNE PROFONDEUR FINIE

I - INTRODUCTION

II - RAPPEL DES ALGORITHMES EN MILIEU HOMOGENE

II-1 - Principe

II-2 - Algorithme utilisant deux longueurs d'ondes

a) Corrélation entre b_p et C

b) Algorithme basé sur la différence $A_{vert} -$

A_{bleu}

c) Algorithme basé sur le rapport $A_{vert} -$

A_{bleu}

III - CARACTERISTIQUES DES FONDS MARINS

III-1 - Nature des dépôts marins

III-2 - Caractéristiques de la réflexion des dépôts
marins

IV - VARIATION DE LA REFLECTANCE EN FONCTION DE LA PROFONDEUR
D'UN FOND DE SABLE

V - APPLICATION DES ALGORITHMES EN PRESENCE D'UN FOND DE SABLE

V-1 - Etude de l'influence de la présence d'un fond de
de sable sur l'emploi d'un algorithme différence

V-2 - Comparaison des deux méthodes

VI - CONCLUSION

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE I - VIOLLIER, M., BAUSSART, N.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES METHODES DE DOSAGE DES CONSTITUANTS
DE L'EAU DE MER ET SUR LEUR COEFFICIENT D'ABSORPTION OPTIQUE

ANNEXE II - PROPRIETES OPTIQUES DES EAUX DU DETROIT DU PAS DE CALAIS. -
EXPERIENCE DU 11 MAI 1978 - RAPPORT INTERNE (1978)

ANNEXE III - VIOLLIER M., BAUSSART, N.

ENHANCEMENT OF LANDSAT IMAGERY FOR THE MONITORING OF COASTAL WATERS. APPLICATION TO THE SOUTHERN PART OF THE NORTH SEA. - 13th INTERN. SYMP. REM. SENS. ENVIRONM. ANN ARBOR, MICHIGAN (1979)

ANNEXE IV - MISE EN EVIDENCE DE L'INFLUENCE DU FOND SUR LA MESURE DE LA COULEUR DE L'OCEAN A PROXIMITE DU BANC SABLEUX DE GOODWIN, DETROIT DU PAS DE CALAIS. - PRESENTE AU CONGRES DE LA SOCIETE FRANCAISE DE PHYSIQUE, TOULOUSE, MAI 1979.

ANNEXE V - ORGANIGRAMME D'UN PROGRAMME DE TRAITEMENT SPECIFIQUE D'IMAGES LANDSAT.

INTRODUCTION

La mesure de la couleur de l'océan c'est à dire la mesure multispectrale dans le domaine visible du rayonnement rediffusé par la mer, est significative du contenu de l'eau en chlorophylle et sédiments. Cette mesure de la couleur de l'océan est effectuée selon différentes techniques :

- mesures au niveau de la mer (1 à 4)
- mesures effectuées lors de vols avion à basse altitude (5 à 10)
- ou de vols à haute altitude (5, 11 à 13)
- et mesures par satellites (14, 15, 16, 58).

Les diverses expériences menées ont montré qu'il existait généralement de bonnes corrélations entre les valeurs de la concentration en pigments chlorophylliens et de la quantité de matières en suspension, mesurées *in situ*, et celles déterminées par télédétection. Cependant les problèmes de la télédétection de la couleur de l'océan ne sont pas tous résolus. Une revue en a été faite (17), d'où il sort en particulier les points suivants :

- il reste à définir plus précisément les propriétés spectrales d'absorption et de rediffusion de différents constituants marins (18, 21, 62)
- il faut développer un ou des algorithmes (simples et précis) de correction atmosphérique, nécessaire dans le cas de mesures par satellites (22 à 25)
- il faut rechercher les meilleurs canaux adaptés à une mesure correcte de la couleur de la mer et à son interprétation (26).

Les points rappelés ci-dessus sont actuellement étudiés, les deux derniers faisant l'objet de recherche au Laboratoire d'Optique Atmosphérique. Un autre problème quelque fois évoqué mais rarement correctement étudié est l'influence de la réflexion du fond de la mer lorsque les eaux sont peu profondes (27, 28). C'est cette question que nous nous proposons d'étudier.

Il est établi que des mesures de bathymétrie par satellites ne peuvent être effectuées sur le littoral français, où les caractéristiques de l'eau sont très variables. Mais si nous cherchons à interpréter le rayonnement ayant interagi avec la mer, il nous est nécessaire de savoir dans quelle mesure la présence du fond marin a pu modifier ce rayonnement.

Nous déterminerons les limites pour lesquelles le fond influence les mesures de télédétection, après avoir, dans un premier chapitre, cherché à modéliser l'albédo de la mer en fonction de l'albédo du fond, et des caractéristiques de la couche d'eau le recouvrant.

Par ailleurs, nous avons contribué à différents travaux sur la télédétection de la couleur de l'océan. Ces travaux sont présentés sous forme d'annexes. L'annexe II est un compte rendu des résultats obtenus lors d'une expérience de télédétection de la couleur de l'océan en Mer du Nord. Elle nous permet, ainsi que la revue bibliographique (annexe I) de justifier les choix effectués pour nos modèles d'absorption-diffusion (voir 2^{ème} partie, § II). La mesure de la couleur de l'océan est principalement effectuée par satellite. L'annexe III nous propose une chaîne de traitement d'une image LANDSAT incluant une correction atmosphérique et faisant apparaître des variations de turbidité (contenu de l'eau en particules). Les figures 1, 2 et 6 y montrent de fortes variations de réflectance et de l'index de turbidité (DT5) sur les hauts fonds. Cet effet est exposé en annexe IV. L'importance des traitements informatiques apparaît dans l'exemple donné en annexe V.

1ère PARTIE

ETUDE THEORIQUE DE L'ALBEDO DE RETRODIFFUSION D'UN MILIEU HOMOGENE,
FINI VERTICALEMENT, LIMITE PAR UN FOND LAMBERTIEN

I - INTRODUCTION

Le rayonnement rétrodiffusé par l'océan dépend des propriétés optiques du milieu absorbant et diffusant qu'il constitue. Celles-ci étant connues, l'équation du transfert radiatif permet de simuler théoriquement les phénomènes de diffusion et d'absorption dans le milieu, et de calculer son albédo A, i.e. le rapport des flux énergétiques remontant et descendant à la limite supérieure. C'est la valeur spectrale de cet albédo qui définit la couleur de l'océan et qui est influencée par les constituants variables du milieu marin optiquement actifs.

La simulation théorique de la couleur de l'océan et son interprétation ont été étudiées précédemment par de nombreux auteurs. L'équation du transfert radiatif est alors résolue dans le cas d'un milieu homogène et semi-infini (29 à 33). Les cas de milieu inhomogène ou fini verticalement ont été peu étudiés dans le cas de l'océan (34 à 36). Le but de cette partie de l'étude est de simuler et d'essayer de paramétriser de façon simple les valeurs d'albédo dans le cas de milieux finis. Les cas suivants ont été considéré : une première couche d'épaisseur optique finie surmontant un fond noir ou réfléchissant de façon lambertienne.

II - RAPPELS

II-1 - Propriétés optiques du milieu

Les propriétés optiques d'un milieu absorbant et diffusant sont définies par les paramètres suivants :

- a, coefficient d'absorption,
- b, coefficient de diffusion,
- c = b + a, coefficient d'extinction,
- $\omega_0 = \frac{b}{a+b}$, albédo pour une simple diffusion,
- p(θ), fonction de phase.

Dans le cas du milieu marin, on distinguera la diffusion moléculaire de la diffusion par les particules. Les coefficients de diffusion respectifs seront alors notés, b_0 et b_p :

$$b = b_0 + b_p$$

(I-1)

et les fonctions de phases respectives $p_o(\theta)$ et $p_p(\theta)$ -

$$p(\theta) = \frac{b_o}{b} p_o(\theta) + \frac{b_p}{b} p_p(\theta) \quad (I-2)$$

La diffusion moléculaire, obéissant à la théorie de RAYLEIGH est bien connue ; sa fonction de phase est de forme symétrique. Par contre, la fonction de phase relative à la diffusion par les particules est très variable avec un pic de diffusion vers l'avant, un minimum autour de $\theta = 135^\circ$, et un maximum secondaire aux angles de diffusion proche de 180° (37, 38). On définit souvent le coefficient de diffusion arrière, B, comme :

$$B = \frac{\int_{\pi/2}^{\pi} p(\theta) \cdot d\theta}{\int_0^{\pi} p(\theta) \cdot d\theta} \quad (I-3)$$

A partir des équations (I-1) et (I-2) on obtient

$$Bb = B_o b_o + B_p b_p \quad (I-4)$$

La diffusion moléculaire étant symétrique, $B_o = 0,5$. Par contre B_p varie dans une large mesure entre 0,005 et 0,03. Dans cette étude, nous avons adopté une fonction de phase $p_p(\theta)$ d'après MOREL (39) et pour laquelle $B_p = 0,012$ (VIOLLIER (8)).

Enfin on distinguera les propriétés d'absorption de l'eau pure, a_o , de celles des pigments chlorophylliens, a_c , ou des autres matériaux, a_m

$$a = a_o + C a_c + M a_m$$

où C et M sont les concentrations respectives.

Le modèle utilisé pour représenter les variations spectrales de ces diverses propriétés optiques est discuté plus en détail dans l'annexe I.

II-2 - Résolution de l'équation de transfert

Le calcul théorique de l'albédo peut être fait par diverses méthodes de résolution de l'équation du transfert radiatif. Ces méthodes sont soit approchées (méthodes d'EDDINGTON, méthode à deux flux) (32, 39 à 41) ou la méthode de MONTE CARLO (30), soit des méthodes de résolution analytiques exactes (8, 43, 44).

Parmi ces dernières, nous avons choisi d'utiliser la méthode des

ordres successifs de diffusion (OSD) (8,43) et la méthode des harmoniques sphériques (HS) (44). La méthode OSD permet de tenir compte aisément des conditions aux limites imposées à la partie supérieure de l'océan par le dioptre eau/air (8). La méthode HS plus rapide, que nous avons largement utilisée, ne considère pas ici, l'interface. Les résultats des deux méthodes restent comparable par l'emploi d'un facteur de transmission de l'interface connue (51).

Dans ce qui suit, les calculs ont été faits pour une source au zénith. La part de l'énergie solaire incidente réfléchie spéculairement (environ 2 %) est systématiquement retranchée en début du programme de calcul (OSD). L'albédo ainsi calculé est donc strictement un albédo de rétrodiffusion par le milieu liquide, et exclut toute contribution de la réflexion en surface.

III - CAS D'UN MILIEU SEMI-INFINI, HOMOGENE VERTICALEMENT

Avant d'aborder le cas d'un milieu fini verticalement, nous donnons ci-après le résultat de nos calculs dans le cas d'un milieu semi-infini homogène verticalement. Ce cas a été étudié par de nombreux auteurs et permet ainsi une comparaison des résultats obtenus. Nous noterons A les albédos, c'est à dire le rapport du flux rediffusé ou flux incident.

L'albédo est noté A^- immédiatement au-dessous du dioptre air-eau, et A^+ immédiatement au-dessus du dioptre. $t = \frac{A^+}{A^-}$ permet d'exprimer le facteur de transmission du dioptre vis à vis de l'albédo de rétrodiffusion : on adopte généralement $t \approx 0,54$ ce qui permet de comparer les divers résultats obtenus pour A^+ et A^- . Cette valeur de t est celle que l'on obtient (51) en supposant que le rayonnement remontant est isotrope juste sur l'interface.

III-1 - Résultats antérieurs à cette étude

De nombreux auteurs ont précédemment calculé l'albédo de rétrodiffusion d'un milieu semi infini par diverses méthodes. Les résultats obtenus ont montré que l'albédo était une fonction croissante de la variable $x = \frac{Bb}{a}$, et diverses expressions analytiques ont été proposées.

JAIN et MILLER (32, 45) obtiennent par une méthode à deux flux :

$$A^- = \frac{x}{1+x+(1+2x)^{1/2}} \quad (I-5)$$

avec $A^- \rightarrow 0,5$ x pour $x \rightarrow 0$.

GORDON (31, 46), développe des résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo sous forme de polynômes de la variable

$$x_g = \frac{\omega_o B}{1 - \omega_o (1-B)} = \frac{x}{1+x}$$

et obtient , dans les cas sans et avec interface,

$$A^- = 0,3244 x_g + 0,1425 x_g^2 + 0,1308 x_g^3 \tag{I-6}$$

$$A^+ = 0,179 x_g + 0,051 x_g^2 + 0,171 x_g^3 \tag{I-7}$$

soit en développant $x_g = x - x^2 + x^3$

$$x_g^2 = x^2 - 2 x^3$$

on obtient

$$A^- = 0,3244 x - 0,1819 x^2 + 0,1702 x^3 \tag{I-8}$$

$$A^+ = 0,179 x - 0,128 x^2 + 0,248 x^3 \tag{I-9}$$

PRIEUR (43), par la méthode des OSD et en négligeant l'interface, propose une représentation de l'albédo sous la forme suivante :

$$A^- = 0,33 x (1+\Delta) \tag{I-10}$$

où Δ , est un paramètre positif ou négatif, de valeur faible qui permet d'encadrer la valeur moyenne de l'albédo. Δ dépend des propriétés d'absorption et de diffusion de l'eau ainsi que des conditions d'éclairement. La détermination expérimentale de Δ (3) a toujours donné des valeurs inférieures à 0,05.

VIOLLIER (8) par la méthode des OSD et en tenant compte de l'interface obtient, pour $0,15 \leq \omega_o \leq 0,85$

$$A^+ = 0,0755 \frac{b_o}{a} + 0,0023 \frac{b_p}{a} \tag{I-11}$$

qui est la forme développée de

$$A^+ = 0,15 x \tag{I-12}$$

pour $B_p = 0,012$.

III-2 - Résultats de cette étude

Les calculs ont été faits pour 3 fonctions de phase différentes qui sont données dans le Tableau I-1. Ces trois fonctions de phase correspondent en fait à un rapport variable entre diffusion moléculaire et particulaire ($0,02 < b_o/b_p < 0,1$). Par ailleurs, on a choisi 9 valeurs de ω_o comprises entre 0,2 et 0,95.

Les valeurs calculées de l'albédo de rétrodiffusion sont données dans les Tableaux I-2 et I-3. Rappelons qu'ici la méthode des HS (Tableau I-2) donne la valeur A^- de l'albédo en l'absence du dioptre air-eau, et que la méthode des OSD (Tableau I-3) donne celle A^+ en tenant compte du dioptre.

Nous avons recherché une approximation polynomiale des résultats obtenus. Pour $x = \frac{Bb}{a} < 0,3$, un polynôme du premier degré donne une approximation suffisante

$$A^+ \approx 0,00055 + 0,1584 x \tag{I-13}$$

sinon on obtient un polynôme de degré 3

$$A^+ \approx 0,1698 x - 0,0609 x^2 + 0,0088 x^3 \tag{I-14}$$

avec une précision relative meilleure que 2,5 %. La comparaison des valeurs exactes et de l'approximation analytique (Equation I-14) est donnée en Figure I-1.

Une approximation analytique du type $\frac{mx}{1+nx}$ donne une précision relative du même ordre. On trouve

$$A^+ \approx \frac{0,1755 x}{1+0,482 x} \tag{I-15}$$

soit en développant pour x faible

$$A^+ \approx 0,1755 x - 0,0845 x^2 + 0,0408 x^3 \tag{I-16}$$

III-3 - Discussion

Si l'on tient compte du rapport $\frac{A^+}{A^-} \approx 0,54$, l'ensemble des formules donne un développement au premier ordre, A^+ valable pour x faible, peu différent de

$$A^- \approx 0,33 x \quad (I-17)$$

Seule l'expression donnée par JAIN et MILLER s'en écarte notablement.

Par contre, dès que l'on développe à des ordres supérieurs les expressions commencent à différer notablement. Le terme polynomial d'ordre 2 a pour valeur

- 0,5 (JAIN et MILLER)
- 0,18 à - 0,23 (GORDON)
- 0,11 à - 0,16 (cette étude).

Quant au coefficient du troisième degré il semble encore plus instable et superflu.

Il semble qu'on puisse adopter le développement analytique suivant

$$A^- \approx 0,33 x - 0,15 x^2 \quad (I-18)$$

ou encore

$$A^- \approx \frac{0,33 x}{1+0,5 x} \quad (I-19)$$

ou encore

$$A^- \approx 1 - \exp(-0,33 x) \quad (I-20)$$

ces deux dernières expressions étant proches de la première, I-20 présentant l'avantage de donner $A^- = 1$ pour $x \rightarrow \infty$.

IV - ALBEDO $A^-(\tau)$ D'UN MILIEU FINI VERTICALEMENT, LIMITE PAR UN FOND NOIR

IV-1 - Recherche d'une formulation analytique approchant $A^-(\tau)$

Contrairement au cas du milieu semi- infini, il n'existe pas de formulation analytique de $A^-(\tau)$, τ étant l'épaisseur optique du milieu.

Nous nous proposons de tester une forme analytique simple traduisant les variations de $A^-(\tau)$ avec une précision de quelques pour cent, en nous aidant de calculs exacts effectués grâce aux H.S.. Ces calculs effectués pour différentes épaisseurs optiques et les mêmes valeurs de ω_0 que précédem-

ment sont donnés dans les tableaux I-4, 5, 6, 2^{nde} colonne, respectivement pour nos fonctions de phase B2, B3 et B5. Les calculs sont effectués sans interface.

A priori, nous chercherons à généraliser la formule suivante, vérifiée pour un milieu obéissant au régime asymptotique :

$$A^-(\tau) = A^- \times (1-T^2) \quad (I-21)$$

avec

$$T = e^{-Kz} \quad (I-22)$$

K étant un coefficient d'atténuation diffuse.

En fait en dehors du régime asymptotique, qui n'est atteint que pour les couches épaisses (ex. $\tau > 5$ pour $\omega_0 = 0,75$) le coefficient d'atténuation diffuse n'est pas constant (43, 48) et ne peut être défini que pour des couches de faibles épaisseurs optiques. Il peut s'écarter sensiblement de la valeur K_∞ du régime asymptotique. Nous cherchons à définir les conditions pour lesquelles K peut être considéré comme constant et par conséquent, pour lesquelles l'équation I-21 sera applicable. Les calculs étant effectués pour la variable sans dimension $\tau = cz$, nous discuterons de la grandeur K/c au lieu de K, I-22 étant réécrit sous la forme

$$T = e^{-\frac{K\tau}{c}} \quad (I-22a)$$

IV-2 - Variation de K/c avec τ

A partir des simulations, résumées dans les tableaux I-4, 5, 6, nous calculons le coefficient $\frac{K(\tau)}{c}$, déduits des équations I-21 et I-22a

$$\frac{K(\tau)}{c} = \frac{-1}{2\tau} \ln \left(1 - \frac{A^-(\tau)}{A^-} \right) \quad (I-23)$$

Les résultats de ces calculs sont présentés dans les tableaux I-4, 5, 6, deuxième partie. Nous avons éliminé les valeurs pour lesquelles la précision des calculs ne permettait pas de retrouver $\frac{K(\tau)}{c}$ avec une fiabilité suffisante (quand $A^-(\tau) \rightarrow A^-$, les valeurs de $\frac{K(\tau)}{c}$ varient dans une grande proportion).

La troisième partie des tableaux précédents nous donne la valeur des coefficients K/c calculée pour une couche finie (τ_{i-1}, τ_i) du milieu. Les

mêmes problèmes de précisions de calculs que précédemment apparaissent aggravés par le fait que le calcul de $\frac{K}{c}(\tau_{i-1}, \tau_i)$ n'est pas effectué sur une couche d'épaisseur optique élémentaire.

Sur l'ensemble de ces tableaux, nous faisons les constatations suivantes

- pour les milieux peu diffusants, c'est à dire ω_0 petit ou plus précisément

$$\frac{Bb}{a} = Bx \left(\frac{1}{1-\omega_0} - 1 \right) \text{ faible,}$$

$\frac{K}{c}(\tau)$ et $\frac{K}{c}(\tau_{i-1}, \tau_i)$ tendent rapidement et par valeurs supérieures vers une même valeur limite atteinte rapidement, vers $\tau = 3$. Ces limites peuvent être comparées aux valeurs de K_∞/c obtenues en régime asymptotique, et données en tableau I-7 (61).

- Pour les milieux très diffusants, ω_0 proche de 1, ou $\frac{Bb}{a}$ élevé

$$\left(\frac{Bb}{a} \geq 0,25 \right), \text{ les valeurs de } \frac{K}{c}(\tau) \text{ et } \frac{K}{c}(\tau_{i-1}, \tau_i)$$

n'atteignent les valeurs asymptotiques que pour $\tau \gg 20$ dans les cas très diffusants.

Le passage de l'un à l'autre cas se fait de façon continue, les cas intermédiaires présentant pour $\frac{K}{c}$ un minimum peu prononcé. Tout en étant différent de la valeur limite $\frac{K_\infty}{c}$, $\frac{K}{c}$ en est un peu éloigné, sauf aux plus faibles épaisseurs optiques (à $\tau = 0,3$ 15 % pour $\frac{Bb}{a} = 0,7$ % pour $\frac{Bb}{a} > 0,25$).

IV-3 - Valeurs moyennes de K/C

Le comportement de K/c avec τ et $\frac{Bb}{a}$ étant difficilement paramétrisable nous cherchons une valeur moyenne $\langle K/c \rangle$ dont l'emploi dans l'expression (I-21, 22) permettra de retrouver $\bar{A}(\tau)$ avec une précision jugée satisfaisante (meilleure que quelques pour cents).

Prenons la dérivée de I-21 par rapport à τ , puis intégrons la en supposant que $K/c(\tau)$ est identique à une constante $\langle K/c \rangle$, il vient

$$\langle K/c \rangle = \frac{1}{2 \int_0^\infty T^2(\tau) d\tau} \tag{I-24}$$

Les valeurs ainsi obtenues sont présentées en dernière ligne des tableaux I-4, 5, 6.

La figure I-2 montre la restitution de $A^-(\tau)$ à l'aide de I-21, en donnant à K/c sa valeur moyenne $\langle K/c \rangle$. La comparaison de la courbe et des points théoriques montre une justification à posteriori de notre modèle. Nous n'avons pas présenté sur cette figure le cas de milieux très peu rétrodiffusants ($\frac{Bb}{a} \leq 0,05$) pour lesquels cette restitution n'est pas aussi bonne (l'écart pouvant atteindre 50 % $\frac{Bb}{a} \approx 0$ et $\tau \neq 1,5$). Ces cas sont par ailleurs peu courants pour nos applications. D'une façon générale la précision sur $A^-(\tau)$ donnée par ce modèle est de 5 %, voire 2 % en s'affranchissant des cas de forte et de très faible diffusion.

IV-4 - Paramétrisation de la valeur moyenne $\langle K/c \rangle$

Afin d'utiliser notre modèle, il est nécessaire de paramétriser la valeur de la moyenne $\langle K/c \rangle$ en fonction de B et ω_0 . Les valeurs $\langle K/c \rangle$ obtenues à travers l'équation I-24, sont données en figure I-3 en fonction de ω_0 . Sur la même figure on a porté les courbes du comportement en régime asymptotique (43). Les points représentant $\langle K/c \rangle$ pour des valeurs réalistes de ω_0 marins ($0,20 < \omega_0 < 0,95$) s'alignent autour de la droite

$$K/c = 1,251 - 1,118 \omega_0 \quad (I-25)$$

Notons que pour de faibles valeurs de ω_0 ($\omega_0 \approx 0,2$), cette formule n'est pas applicable, car elle nous donne des valeurs non réalistes de K/c ($K/c > 1$).

La figure I-3 montre que la dépendance de $\langle K/c \rangle$ avec ω_0 se conjugue d'une dépendance de la fonction de phase étudiée.

Ces effets sont plus clairement mis en évidence en figure I-4, où nous portons $\langle K \rangle / a = \langle K/c \rangle \times 1/(1-\omega_0)$ en fonction de B .

Nous recherchons une formule analytique permettant de restituer finement les variations de $\langle K/c \rangle$ avec B et ω_0 . La formulation suivante

$$\langle K/c \rangle = 1,239 \times (1-\omega_0) \times (1+6,954 \times B \times (\frac{1}{1-\omega_0} - 1))^{0,295} \quad (I-26)$$

donne des résultats satisfaisants pour $x \leq 0,3$.

Avant de conclure ce chapitre, notons que chacune de nos équations I-25, 26 admet une formulation approchée, rappelant la formule souvent employée (48)

$$K \approx \frac{4}{3} a \quad (I-27)$$

La valeur de K/c est obtenue à l'aide de l'une des formes proposées avec une précision suffisante pour que son emploi dans notre modèle (I-21) nous permette d'obtenir l'albédo $A^-(\tau)$ avec une bonne précision (moins de 5 %) dans la majorité des cas.

V - ALBEDO $A^-(\tau, \rho)$ D'UN MILIEU FINI LIMITE PAR UN FOND LAMBERTIEN

Utilisant les HS nous avons calculé exactement l'albédo $A^-(\tau, \rho)$ d'un milieu fini, limité par un fond lambertien de réflectance ρ .

Nous avons utilisé différentes valeurs de réflectances en particulier $\rho = 0,10$, $0,20$ et $0,25$. Les valeurs des albédos $A^-(\tau, \rho)$ calculées dans ces différents cas sont résumées dans les tableaux I-4, 5, 6 colonnes 3, 4 et 5 respectivement pour $\rho = 0,10$, $0,20$ et $0,25$.

V-1 - Résultats antérieurs

Remarquant la similitude entre les milieux marin et atmosphérique, pour lequel la luminance mesurée en haut de l'atmosphère est, au premier ordre une forme linéaire de la réflectance du sol (25), l'albédo $A^-(\tau, \rho)$ serait simulable par

$$A^-(\tau, \rho) = A^-(\tau) + \rho T^2 \quad (I-28)$$

T^2 étant une fonction d'annénuation diffuse et $A^-(\tau)$ l'albédo dans le cas du sol noir. Dans le cas du milieu marin limité par un fond lambertien, peu d'études ont été menées. Citons GORDON (34), qui a tabulé pour quelques valeurs de ω_0 , τ et B , la valeur de $A^+(\tau, \rho)$. Tenant compte des interactions successives entre le milieu et le fond lambertien, il pose

$$A^+(\tau, \rho) = A^+(\tau) + \frac{\rho \cdot A_1(\tau)}{1 - \rho r(\tau)} \quad (I-29)$$

où A^+ , A_1 , et r sont des fonctions tabulées avec ω_0 et τ pour trois valeurs de B , A_1 ayant le sens d'une fonction de transmission diffuse.

Une autre étude est faite par LYZENGA (49) qui donne l'expression limite de $A^+(\tau, \rho)$ quand τ tend vers zéro.

V-2 - Simulations et traitements effectués

Les valeurs $\bar{A}(\tau, \rho)$ que nous avons calculées sont portées dans les tableaux I-4 à I-6.

Nous étudions tout d'abord l'expression I-29 qui est la forme la plus satisfaisante, car prenant en compte toutes les interactions milieu - fond. Les développements que nous effectuons lors de cette étude sont portés dans les tableaux I-8, 9, 10 (voir équation I-32) . Nous discuterons ensuite de la possibilité de n'utiliser que le développement limité au premier ordre de l'équation I-29. Les calculs effectués en utilisant cette forme limitée (équation I-28) sont portés en 2ème et 3ème partie des tableaux I-4, 5, 6. Nous ferons alors apparaître la nécessité d'utiliser l'une ou l'autre des expressions selon l'importance des phénomènes de diffusion.

V-3 - Paramétrisation de l'expression de $\bar{A}(\tau, \rho)$ non linéaire avec ρ

On peut montrer (34, 50) que les interactions successives entre le milieu marin et le fond, permettent d'écrire l'albédo $\bar{A}(\tau, \rho)$ sous la forme

$$\bar{A}(\tau, \rho) = \bar{A}(\tau) + \frac{\rho T'^2}{1 - \rho r(\tau)} \quad (\text{I-30})$$

où nous chercherons $r(\tau)$ sous la forme

$$r(\tau) = \bar{A}(\tau) \times A'(\tau) \quad (\text{I-31})$$

On posera

$$T'(\tau) = e^{-\frac{K'}{C} \tau}$$

Ce choix est suggéré par les calculs de TANRE (23) qui montre que $r(\tau)$ est identique à la valeur du flux qui traverserait le fond du milieu si celui-ci était éclairé par une source isotrope unité située au fond du milieu. Nous savons que dans le cas d'un milieu marin la valeur de l'albédo de rétrodiffusion dépend peu des conditions d'éclairement (cf. § III-1 ; 43), aussi nous identifierons $r(\tau)$ à la valeur de l'albédo $\bar{A}(\tau)$, en le corrigeant par une fonction $A'(\tau)$.

Pour tester la validité de l'équation I-30, nous nous ramenons à l'étude des deux fonctions $T'(\tau)$ et $A'(\tau)$. La fonction de transmission diffuse $T'(\tau)$ est indépendante de la valeur de ρ , il est alors possible de s'affranchir de cette valeur pour déterminer l'expression de la fonction $A'(\tau)$.

a) - Etude de la fonction A'(τ)

Comparant les albédos calculés dans deux cas de réflectance du fond, nous déduisons la valeur de la fonction A'(τ) des équations I-30 et I-31 par

$$A'(\tau) = \frac{\{A^-(\tau_1 \rho_1) - A^-(\tau)\} \rho_2 - \{A^-(\tau_1 \rho_2) - A^-(\tau)\} \rho_1}{\rho_1 \rho_2 A^-(\tau) \{A^-(\tau_1 \rho_1) - A^-(\tau_1 \rho_2)\}} \quad (I-32)$$

Les valeurs ainsi calculées sont présentées dans les tableaux I-8, 9, 10.

Dans les cas de forte rétrodiffusion, pour lesquels l'utilisation de la forme I-30 est nécessaire, la fonction A'(τ) apparaît indépendante de ρ₁ et ρ₂. Cette fonction se comporte de façon hyperbolique avec τ

$$A'(\tau) = A'_\infty + \frac{1}{p\tau + q} \quad (I-33)$$

les coefficients A'_∞, p et q variant avec B et ω₀. La forme I-33 est respectée pour $\frac{Bb}{a} \geq 0,13$, l'ordre de grandeur des coefficients étant

fonction	B2	B3	B5
A' _∞	1,35	1,25	1,15
q	0,37	0,49	0,64

et p variant entre 0,25 et 0,65.

Notons qu'il n'est pas nécessaire de connaître exactement la valeur de A'. En effet le produit ρ x A⁻(τ) étant faible (quelques pour cents), l'erreur δ commise sur

$$\frac{\rho}{1 - \rho A^-(\tau) A'(\tau)} \approx \rho (1 + \rho A^-(\tau) A'(\tau)) = \rho + \delta$$

est au plus de quelques 10⁻³. Une bonne représentation de la fonction T' est au contraire primordiale, l'erreur introduite par A'(τ) étant très faible par rapport à celle que l'on peut commettre sur T'.

b) - Calcul de T'(τ) et <K'/c>

Les valeurs calculées de $\frac{K'}{c}(\tau)$ déduites de T'(τ) et <K'/c> (équation I-24) sont également portées dans les tableaux I-8, 9, 10, dernière colonne.

Nous trouvons que ces valeurs sont supérieures à celles, $\frac{K}{c}(\tau)$ et $\langle K/c \rangle$, obtenues dans le cas du fond noir (tableaux I-4, 5, 6, 2ème colonne) : $T'(\tau)$ est associé à un comportement diffus des photons dans le milieu, aussi le trajet moyen des photons est supérieur à celui associé à un comportement à caractère directionnel, K' est alors supérieur à K . La valeur moyenne $\langle K'/c \rangle$ peut être développée suivant (cf. I-25, 26)

$$\langle \frac{K'}{c} \rangle = 1,270 - 1,201 \omega_0 \quad (\text{I-34})$$

$$\langle \frac{K'}{c} \rangle = 1,263 \times (1-\omega_0) \times (1+5,217 \times B \times (\frac{1}{1-\omega_0} - 1))^{0,897} \quad (\text{I-35})$$

En utilisant dans l'équation I-22b, la valeur moyenne $\langle K'/c \rangle$, nous pouvons commettre une erreur de 30 % sur $A^-(\tau, \rho)$. Il est donc, ici, nécessaire de tenir compte du comportement de $\frac{K'}{c}(\tau)$ avec τ . Ce comportement peut être approché par une fonction de type hyperbolique

$$\frac{K'}{c}(\tau) \approx \frac{K^\infty}{c} + \frac{1}{p' \tau + q'} \quad (\text{I-33a})$$

l'erreur étant ainsi ramenée à 2 % (on néglige les très faibles épaisseurs optiques). Il ne nous est pas apparu de paramétrisation de cette fonction avec B et ω_0 .

La principale cause d'erreur sur $A^-(\tau, \rho)$ provient donc de la fonction $T'(\tau)$ et ceci d'autant plus que $\frac{Bb}{a}$ est élevé.

V-4 - Paramétrisation de l'expression de $A^-(\tau, \rho)$ linéaire avec ρ

Nous supposons maintenant que la relation I-28 est vérifiée. Nous pouvons alors déduire directement l'expression de $\frac{K'}{c}(\tau)$ et sa valeur moyenne $\langle K'/c \rangle$. Ces valeurs sont portées dans les tableaux I-4, 5, 6 (colonnes 3,4,5 respectivement pour $\rho = 0,10 ; 0,20$ et $0,25$). Si nous utilisons l'expression I-28, toutes les interactions entre le milieu et le fond ne sont pas toutes considérées, ceci conduit à modifier la valeur de la fonction de transmission $T'(\tau)$ en conséquence, l'expression de $\langle K'/c \rangle$ que nous en déduisons (équ. I-24) se trouve alors être fonction de la réflectance ρ du fond, voir figure I-5.

Lorsqu'il y a très peu de phénomènes de diffusion, $\frac{Bb}{a} \leq 0,05$, on trouve que $\langle K'/c \rangle$ est peu différent de $\langle K/c \rangle$ (1 à 2 % d'écart). Il est possible dans ce cas de confondre T' et T (cas du fond noir) en commettant une erreur de 5 % sur $A^-(\tau, \rho)$.

V-5 - Représentation de l'albédo $A^-(\tau, \rho)$ selon l'importance des phénomènes de diffusion

Nous venons de voir que la représentation I-30 est nécessaire en cas de forte rétrodiffusion alors que I-28 (développement limité au premier ordre de I-30) suffit en cas de faible diffusion. Nous allons ici préciser le passage de l'un à l'autre cas, selon l'importance des phénomènes de diffusion représentée par la variable $\frac{Bb}{a}$. Nous acceptons une erreur de 5 % sur $A^-(\tau, \rho)$

- pour $\frac{Bb}{a} < 0,05$, I-28 est utilisable avec $T'(\tau) = T(\tau)$
- ensuite, I-28 est utilisable en prenant $\langle K'/c \rangle \neq \langle K/c \rangle$, les valeurs de $\langle K'/c \rangle$ proches de celles trouvées en § V-3 (équation I-34, 35) peuvent être réajustées selon la valeur de ρ (cf. § V-4)
- puis il devient nécessaire de traduire le comportement de $\frac{K'(\tau)}{c}$ avec τ au moins de façon approchée (hyperbole I-33a)
- et quand $\frac{Bb}{a} > 0,13$, il est nécessaire de tenir compte de tous les effets, c'est à dire de connaître la fonction $A'(\tau)$.

La limite intermédiaire mal définie, dépend aussi de la précision souhaitée, elle est de l'ordre de $\frac{Bb}{a} \approx 0,08$ à $0,10$.

Pour toute la gamme de rétrodiffusion étudiée ($0 < \frac{Bb}{a} < 1$) il est possible de représenter $A^-(\tau, \rho)$ avec une précision bien souvent meilleure que 5 %, en respectant le plan précédent. Il n'est pas nécessaire de tenir compte de toutes les interactions milieu - fond, selon la valeur de $\frac{Bb}{a}$.

VI - ALBEDO $A^+(\tau, \rho)$ EN PRESENCE DE L'INTERFACE EAU/AIR

Le programme de résolution de l'équation de transfert par les Ordres Successifs de Diffusion (O.S.D.) étant plus lent que les H.S., nous n'avons étudié qu'un nombre limité de cas de calcul de l'albédo de rétrodiffusion d'un milieu homogène fini, limité par un fond noir ou lambertien, en présence de l'interface eau/air.

Les cas étudiés nous permettent de généraliser l'étude entreprise avec les H.S. (sans interface) au cas du milieu marin avec l'interface eau/air.

Nous ferons une brève discussion sur l'influence de cette interface, puis présenterons et discuterons la formule par laquelle nous représenterons l'albédo $A^+(\tau, \rho)$ telle que nous l'utiliserons en seconde partie.

VI-1 - Etude de l'effet d'interface

Rappelons tout d'abord que notre programme de calcul par les O.S.D.,

retranche au flux incident les 2 % environ de réflexion sur la surface (soleil au zénith).

AUSTIN (51) traite différemment de l'influence de l'interface sur l'albédo du milieu, $A^-(\tau)$ sous le niveau de l'eau, et de celle sur un flux remontant, diffus et isotrope obtenu par réflexion diffuse sur le fond du milieu. Pour représenter ce deuxième effet, nous avons calculé par les O.S.F., l'albédo $A^+(\tau, \rho)$ pour différentes valeurs de ρ , ω_0 et B avec $\tau = 0$. Dans chaque cas, nous trouvons un terme de transmission à travers l'interface

$$t_e = 0,53 \quad (I-36)$$

Nous plaçant dans les mêmes conditions que AUSTIN, nous trouvons la même valeur de t_e .

Etudions le rayonnement marin diffus, non isotrope. Usant d'approximations, AUSTIN retrouve la valeur généralement utilisée de 0,54. Si nous comparons les tableaux I-2 et I-3 donnant A^- et A^+ nous pouvons exprimer $t = \frac{A^+}{A^-}$, variable avec Bb/a mais proche de 0,54.

Dans un milieu peu diffusant, le rayonnement remontant est à caractère directionnel (pic de rétrodiffusion) ; dans le cas limite où ce rayonnement pourrait être approché par un pic de Dirac, on trouverait $t = 0,98 \times 0,98$. Pour un milieu très diffusant, le rayonnement remontant tend à devenir de plus en plus diffus et à la limite isotrope, dans ce cas t tend vers t_e .

Ce raisonnement simpliste permet d'expliquer le comportement observé de $t = A^+/A^-$ en fonction de Bb/a (figure I-6).

VI-2 - Albédo $A^+(\tau)$ d'un milieu fini limité par un fond noir

Différents cas étudiés sont présentés tableaux I-11, 12. Nous y proposons également les calculs de K/c au niveau τ et pour une couche finie en τ . Nous constatons que globalement $\langle K/c \rangle$ est inférieur à la valeur correspondant au même cas, trouvée par les H.S.. On peut expliquer cet effet de la façon suivante :

La présence de l'interface modifie le champ des luminances en renvoyant dans le milieu marin, une fraction du flux remontant (8). Cette source apparente de lumière agissant principalement aux incidences rasantes, modifie le champ des luminances en le rendant plus diffus. Nous savons que plus la lumière est diffuse c'est à dire ω_0 élevé, plus la valeur de K/c est faible. La similitude entre les deux phénomènes explique cette diminution de la valeur de $\langle K/c \rangle$ lorsqu'on tient compte de l'interface.

A cette différence près, la validité de la formule

$$A^+(\tau) = A^+(1-T^2) \quad (I-21a)$$

respecte les mêmes limites que celles trouvées en chapitre V. A l'aide des résultats obtenus sur un échantillon plus restreint de Bb/a , nous développons $\langle K/c \rangle$ des façons suivantes

$$\langle K/c \rangle = 1,101 - \omega_0 \quad 1,043 \quad (I-25a)$$

$$\langle K/c \rangle = 1,082(1-\omega_0) (1+3,128 \times B \times (\frac{1}{1-\omega_0} - 1)) \quad 0,509 \quad (I-26a)$$

VI-3 - Albédo $A^+(\tau, \rho)$ d'un milieu fini limité par un fond lambertien

Cette étude n'a été menée que pour quelques cas isolés. Elle est suffisante pour montrer que l'albédo doit être réécrit comme

$$A^+(\tau, \rho) = A^+(\tau) + t_e \rho \quad T^2(\tau) \quad (I-37)$$

l'interface modifiant la valeur de $A^-(\tau)$ en $A^+(\tau)$ et agissant sur l'effet de fond en le multipliant par $t_e \approx 0,53$. Il ne nous a pas été possible de refaire toute l'étude précédente par manque de cas traités (les O.S.D. étant beaucoup plus lourds que les H.S.). Nous avons établi les constatations suivantes

- $\langle K/c \rangle(\rho)$ reste proche de $\langle K/c \rangle$ en lui étant supérieur. Il reste possible de ne garder que cette seule valeur de $\langle K/c \rangle$ en augmentant légèrement l'erreur ;

- les faibles valeurs utilisées de la réflectance ρ n'ont pas permis de trouver à partir de quelle valeur de ω_0 ou Bb/a , il n'est plus possible de ne considérer qu'une seule valeur de $\langle K/c \rangle$; ni de rechercher l'effet de non linéarité en ρ .

Les erreurs commises sur $A^+(\tau, \rho)$ restent, pour les cas étudiés, acceptables et sont même généralement inférieures à celles de $A^-(\tau, \rho)$. Sauf cas défavorables, $A^+(\tau, \rho)$ est retrouvée à moins de 5 % près.

VII - CONCLUSION

Au cours de cette étude, nous avons cherché à représenter le plus

simplement possible et avec une bonne précision, l'albédo $A^+(\tau, \rho)$ d'un milieu fini, limité par un fond lambertien de réflectance ρ .

Pour les développements menés en seconde partie, nous utiliserons la formulation suivante

$$A^+(\tau, \rho) = A^+(\tau) + 0,53 \times \rho \times T'^2(\tau) \quad (\text{I-37a})$$

où - $A^+(\tau)$ serait l'albédo du milieu s'il était limité par un fond noir :

- ρ la réflectance du fond ;
- $t = 0,53$ le facteur de transmission à travers l'interface ;
- et $T'(\tau)$ une fonction de transmission diffuse que nous écrivons

$$T'(\tau) = e^{-\left\langle \frac{K'}{c} \right\rangle \tau} \quad (\text{I-22c})$$

en identifiant $\left\langle \frac{K'}{c} \right\rangle$ à $\langle K/c \rangle$ (équation I-25a et I-26a).

Ce choix est justifié à posteriori par les faibles valeurs de la variable $\frac{Bb}{a}$ avec lesquelles nous travaillons essentiellement. Comme nous nous intéressons à l'ordre de grandeur des écarts apportés aux valeurs des albédos A^+ , par la présence du fond réfléchissant, la précision donnée par I-37 est suffisante.

2ème PARTIE

INTERPRETATION DE L'ALBEDO DE RETRODIFFUSION DE LA MER, EN PRESENCE
D'UN FOND REFLECHISSANT A PROFONDEUR FINIE

I - INTRODUCTION

Dans le cas du milieu homogène, il existe des algorithmes d'interprétation de la couleur de l'océan qui permettent d'extraire, avec une précision jugée suffisante, les concentrations en pigments chlorophylliens (9,12,56,57) et en particules en suspension (15,58 à 60). Le but de cette seconde partie est de chiffrer les erreurs entraînées par la présence du fond marin réfléchissant lors de l'application de ces algorithmes. L'étude sera effectuée en appliquant le modèle théorique précédemment développé à différents cas, obtenus en faisant varier, d'une part, les paramètres marins, d'autre part, la profondeur du fond (voir § III).

Nota : Les mesures expérimentales du rayonnement quittant la mer, donnent généralement une valeur de réflectance. Si le rayonnement quittant la mer est isotrope, une mesure de réflectance de rétrodiffusion est équivalente à une mesure d'albédo de rétrodiffusion.

Notre modèle ayant été développé à partir des albédos, nous garderons ce terme, excepté quand il s'agira de références à des travaux effectués en réflectances, ces réflectances seront notées R_λ pour les différencier des albédos A_λ .

II - RAPPEL DES ALGORITHMES EN MILIEU HOMOGENE

II-1 - Principe

Les bases théoriques des algorithmes sont contenues dans l'équation I-13 qui donne la valeur de l'albédo en fonction des coefficients d'absorption (a), de diffusion (b) et de diffusion arrière (B).

En paramétrisant le coefficient d'absorption de la concentration en pigments chlorophylliens (C , en mg/m^3) et en adoptant quelques hypothèses simplificatrices pour le modèle de diffusion par les particules ($b_p \sim \lambda^{-1}$, $B_p = \text{constante}$), on peut très facilement exprimer les albédos à différentes longueurs d'onde en fonction de C et de b_p .

En inversant ce problème, VIOLLIER et al (9) ont proposé un algorithme où b_p et C étaient obtenus indépendamment l'un de l'autre. L'évaluation de b_p était obtenue à l'aide d'une mesure dans le jaune-orange, région spectrale où l'absorption par les pigments chlorophylliens est minimum. L'évaluation de C était obtenue à l'aide d'une mesure dans le bleu, région spectrale caractéristique de l'absorption photosynthétique. L'évaluation de C devait

être corrigée des effets de diffusion à l'aide du coefficient b_p obtenu par la première mesure.

On rappelle que les deux mesures optiques utilisées étaient les différences de réflectances à 550 et 600 nm, et à 525 et 466 nm :

$$\begin{array}{l} R_{550} - R_{600} \text{ pour } b_p \\ \text{et} \quad R_{525} - R_{466} \text{ pour } C \end{array}$$

Le choix des différences de réflectances, au lieu des valeurs brutes ou des rapports, était dicté par la nécessité d'éliminer une part importante des effets perturbateurs (réflexion de surface, aérosols atmosphériques) (25)

II-2 - Algorithmes utilisant deux longueurs d'onde

Le coefficient de diffusion par les particules b_p peut être corrélé à la concentration en pigments C (52). Dans ces conditions, la double détermination de b_p et de C devient inutile et un algorithme simplifié à 2 longueurs d'onde ($A_{525} - A_{466}$) est suffisant (10).

a) - Corrélation entre b_p et C

- les mesures recueillies pendant l'expérience SCOR DISCOVERER (1971) (1,53) donnent la loi

$$b_p = 0,06 + 0,41 C \quad (\text{II-1a})$$

établie pour $C < 0,8 \text{ mg/m}^3$

- les mesures que nous avons obtenues lors d'une expérience dans le Détroit du Pas de Calais (voir Annexe II) donnent

$$b_p = 0,05 + 0,6 C \quad (\text{II-1b})$$

- enfin VIOLLIER et al (10,25) interprètent des mesures de télédétection $R_{525} - R_{466}$ en supposant

$$b_p = 0,05 + 0,27 C \quad (\text{II-1c})$$

L'usage d'une relation linéaire semble donc justifié, même si les coefficients diffèrent quelque peu, probablement en fonction de la masse d'eau considérée.

b) - Algorithme basé sur la différence $A_{\text{vert}} - A_{\text{bleu}}$

Les figures II-1a et II-1b montrent la relation entre la différence d'albédo ($A_{520} - A_{443}$) et C. Elles ont été obtenues avec les hypothèses suivantes :

- albédo de rétrodiffusion donnée par l'équation I-13, c'est à dire

$$A = 15,84 \frac{B_p}{a} \quad (A \text{ en } \%) \quad (\text{II-2})$$

- constante de rétrodiffusion par les particules égale à :

$$B_p = 0,012$$

- variation de b_p suivant une loi en λ^{-1}
 - absorption : l'annexe I présente une revue bibliographique de différents spectres $a_c(\lambda)$ d'absorption par les pigments de type chlorophyllien. Nous avons choisi, pour cette étude, deux spectres de sélectivité ($r = a_c(440) / a_c(600)$) très différentes :

1) Coefficients de YENTSCH (1959) (18)

$$a = a_0 + a_c \cdot C \quad (\text{II-3a})$$

avec $a_c(443) = 0,094 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$, $a_c(520) = 0,012 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$.
 et $a_0(443) = 0,015 \text{ m}^{-1}$, $a_0(520) = 0,048 \text{ m}^{-1}$ (3).

2) Coefficients de MOREL (1978) (13)

$$a = a_0 + a_c \cdot C + a_p \cdot b_p \quad (\text{II-3b})$$

avec

$$a_c(443) = 0,025 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$$

$$a_c(520) = 0,016 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$$

et

$$a_p(443) = 0,072 \text{ m}^{-1}/\text{m}^{-1}$$

$$a_p(520) = 0,032 \text{ m}^{-1}/\text{m}^{-1}$$

- corrélation entre b_p et C : on prend

$$b_p = 0,05 + p.C$$

en considérant, suivant les équations II-1, 2 valeurs de p :

$$p = 0,27 \text{ et } p = 0,6 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$$

Nous définissons ainsi les quatre modèles suivants :

Y1 : modèle d'absorption de YENTSCH, $p = 0,27 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$

Y2 : modèle d'absorption de YENTSCH, $p = 0,60 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$

M1 : modèle d'absorption de MOREL, $p = 0,27 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$

M2 : modèle d'absorption de MOREL, $p = 0,60 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$

La courbe d'absorption de YENTSCH est nettement plus sélective que celle de MOREL, ce qui explique que la sensibilité au contenu en chlorophylle apparaisse plus élevée sur la figure II-1a.

L'influence de la valeur de p (0,27 ou 0,6) apparaît de seconde importance par rapport au choix du modèle d'absorption. Elle est toutefois notable pour les valeurs élevées de C ($C > 1 \text{ mg.m}^{-3}$).

c) Algorithme basé sur le rapport $A_{\text{vert}}/A_{\text{bleu}}$

Les opticiens marins préfèrent utiliser un rapport de réflectances plutôt qu'une différence. En effet lorsque la mesure est effectuée par un appareil immergé (donc sans perturbation de l'atmosphère ou de la surface) il devient plus intéressant de faire des rapports, cette méthode ayant l'avantage de minimiser l'influence d'éventuelles variations de B_p , non considérées dans notre modèle.

Les figures II-2a et II-2b montrent la relation entre les rapports d'albédos A_{520}/A_{443} et la concentration en pigment C, établie pour les mêmes hypothèses que précédemment.

Les conclusions concernant la sensibilité de la mesure à la concentration en pigments C, liée au choix du modèle d'absorption, restent identiques. L'influence de la constante p reliant b_p et C, est ici mineure dans le cas des modèles utilisant les coefficients d'absorption de YENTSCH.

En utilisant le modèle d'absorption (II-3b), cas des spectres d'absorption de MOREL, le rapport des albédos minimise l'influence des variations de $B_b(\lambda)$ avec p , mais non celles de $a(\lambda)$ (figure II-2b).

III - CARACTERISTIQUES DES FONDS MARINS

III-1 - Nature des dépôts marins

On rappelle brièvement quelques notions élémentaires (54).

La nature des dépôts marins sur le plateau continental dépend des caractéristiques du littoral et de son histoire. Les sables et galets proviennent essentiellement des apports fluviaux, ainsi que de l'érosion du littoral. Le sable se disperse sur le plateau continental en un mélange assez homogène de particules de différentes origines. A l'opposé, les galets sont peu sensibles au mouvement de l'eau et restent localisés près des côtes. Les galets rencontrés au large du plateau continental sont dans ces conditions les témoins d'un recul du littoral (exemple le banc de Sandettié dans le Détroit de Pas de Calais).

De granulométrie plus fine que le sable, on rencontre également les boues, vases, argiles et tangles, mélanges complexes de sédiments continentaux et de débris organiques marins.

On peut également trouver un couvert végétal sur les fonds peu profonds où la photosynthèse reste possible. La présence d'un couvert végétal dépend également des conditions locales : stabilité et richesse organique des dépôts pour permettre la fixation et la croissance des plantes. Ces conditions ne sont généralement pas remplies par exemple dans le Détroit du Pas de Calais, à cause du continuel brassage des eaux littorales par des courants de marée.

III-2 - Caractéristique de la réflexion des dépôts marins

On présente ci-dessous (figure II-3) (27) les réflectances spectrales,

supposées parfaitement diffuses, de fonds de nature différente : sable, boue et végétation. En l'absence de données plus nombreuses, nous considérons ces signatures spectrales suffisamment représentatives.

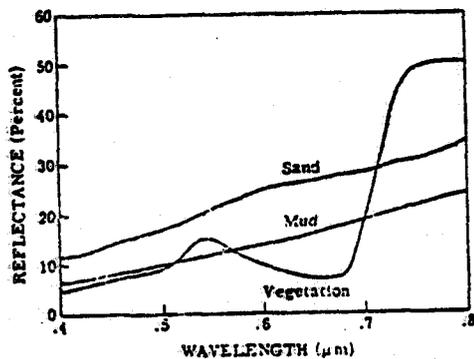


Figure II-3 - Spectres de réflectances d'un sol de sable, de boue ou couvert de végétation (blé) d'après LYZENGA (27)

On remarque que ces réflectances présentent leurs plus faibles valeurs aux courtes longueurs d'onde, particulièrement dans la zone de plus grande transparence de l'eau entre 400 et 550 nm. Cela explique que le fond ne soit généralement pas directement perçu, à l'exception des cas d'eaux très claires (exemple de la bathymétrie par LANDSAT des régions d'eaux claires(55)).

Le sable, qui présente la réflectance moyenne la plus élevée dans la fenêtre marine, est l'élément qui peut en premier lieu perturber les mesures de télédétection. Le sable est également le dépôt marin le plus largement répandu. Ces deux remarques justifient que nos simulations concerneront des fonds sableux.

IV - VARIATION DE LA REFLECTANCE EN FONCTION DE LA PROFONDEUR D'UN FOND DE SABLE

Les courbes des figures II-4 représentent l'albédo d'une couche d'eau d'épaisseur variable Z reposant sur un fond de sable, respectivement à 443, 520, 550 et 670 nm.

Trois types d'eau sont considérées claire, moyennement turbide et turbide, correspondant suivant le modèle décrit plus haut respectivement à $C = 0,2$; 1 et 5 mg/m^3 de pigments chlorophylliens (voir Annexe II). Nous avons en figure II-4, utilisé le seul modèle d'absorption-diffusion Y2.

En supposant qu'un radiomètre ait un $\Delta\rho$ (bruit équivalent en réflectance) égal à $5 \cdot 10^{-3}$, ces figures montrent qu'un fond de sable peut influencer la mesure jusqu'aux profondeurs suivantes (en mètres)

λ (nm) =		443	520	550	670
eau claire $C = 0,2 \text{ mg/m}^3$	Y1	43	37	30	5,2
	Y2	41	36	29	5,2
	M1	50	34	28	5,2
	M2	43	32	27	5,2
eau moyennement turbide $C = 1 \text{ mg/m}^3$	Y1	16	29	26	4,8
	Y2	14	26	23	4,7
	M1	24	24	22	4,9
	M2	17	20	19	4,7
eau turbide $C = 5 \text{ mg/m}^3$	Y1	3,7	14	16	3,4
	Y2	3,4	11	12	3,3
	M1	6,8	10	11	3,8
	M2	4,2	6,8	7,5	3,2
maximum		50	37	30	5,2

Tableau II-1 - Profondeur pour laquelle la présence d'un fond de sable introduit un écart de $5 \cdot 10^{-3}$ à la valeur de l'albédo A du seul milieu marin (équation II-2).

D'autre part il est intéressant de noter que lorsque l'albédo du fond multiplié par le facteur de transmission à l'interface (0,53) est sensiblement égal à l'albédo de la couche d'eau, l'albédo reste pratiquement constant. Ceci rend totalement équivoque toute tentative de bathymétrie à cette seule longueur d'onde, sans connaissance préalable de la nature du fond.

V - APPLICATION DES ALGORITHMES EN PRESENCE D'UN FOND DE SABLE

On peut prévoir à priori que l'extraction des paramètres marins, qui n'est pas directement liée aux valeurs absolues des albédos, mais à leur valeur relative (rapport ou différence), sera moins sensible à la présence d'un fond que ne le sont les valeurs absolues de l'albédo à une seule longueur d'onde, 443 ou 520 nm.

Ce problème, consistant à chercher l'erreur équivalente en concentration de pigments induite par la présence d'un fond de sable, a été étudié en appliquant les calculs suivants

1) - Calcul des réflectances à 443 et 520 nm, pour une concentration C donnée, et pour une profondeur Z du fond.

2) - Calcul de la différence ou du rapport de réflectance à 443 et 520 nm.

3) - Extraction de la concentration en pigments C' d'après chacun des algorithmes décrits en sections II-2b, c.

4) - Comparaison entre C' et la valeur initiale C .

Nota : L'utilisation des équations II-1 et II-2 permet d'inverser la valeur de la différence ou du rapport en taux de pigments absorbants C .

Pour chacun des deux algorithmes, différence et rapport, nous avons choisi deux représentations, l'une mettant en évidence l'influence de C à profondeur donnée (figures II-5, II-7), l'autre celle de Z à C donné (figures II-6, II-8). Nous utilisons les deux modèles d'absorption-diffusion $M1$ et $Y2$, ceux-ci présentant deux comportements très différents.

La modélisation mathématique du problème donnant C' en fonction de C , Z et du modèle d'absorption-diffusion choisis est un problème complexe (nombreux paramètres à discuter). Aussi nous préférons faire une discussion qualitative des divers comportements observés à partir des courbes tracées : les figures II-5, 6 sont relatives aux algorithmes différence et les figures II-7, 8 aux algorithmes rapport.

La similitude des comportements des deux algorithmes rapport et différence, fait que nous n'allons discuter qu'un seul cas : algorithme différence $Y2$, une discussion identique pouvant être tentée dans le cas du rapport.

V-1 - Etude de l'influence de la présence d'un fond de sable sur l'emploi d'un algorithme différence

Nous traitons de l'algorithme différence Y2. A toute profondeur Z donnée, la différence d_z d'albédos $A_{520} - A_{443}$, est écrite comme une différence de deux fonctions exponentielles : la fonction d_z sera continue et pourra présenter un extremum, que nous noterons E s'il existe. Nous noterons d_0 et d_∞ , la valeur de la différence d'albédos quand Z est nulle et Z infinie.

Les divers comportements de C' correspondent aux relations suivantes de d_0 , d_∞ et E, s'il existe :

1) $d_0 > d_\infty > E$: c'est le cas pour $C \leq 0,3 \text{ mg.m}^{-3}$, dans ce cas C' est d'abord supérieur, puis inférieur à C. Il n'y a sous-estimation de C que pour des profondeurs d'une dizaine de mètres.

2) $d_0 > d_\infty$: $0,3 \leq C \leq 0,6 \text{ mg.m}^{-3}$, il y a alors toujours surestimation de C, il faut que le fond soit à plus de 25 mètres pour que l'erreur sur C soit inférieure à 15 %.

3) $E > d_0 > d_\infty$: $0,6 \leq C \leq 2,7 \text{ mg.m}^{-3}$, il y a toujours sur-évaluation de C, mais le maximum de l'erreur sur C correspond à une profondeur non nulle contrairement au cas précédent.

4) $E > d_\infty > d_0$: $C \geq 2,7 \text{ mg.m}^{-3}$, à une sous-évaluation de C pour de très faibles profondeurs, succède rapidement une surestimation de C.

Nous remarquons en outre sur cette courbe II-5 et sur la figure II-6, que lorsque la richesse de l'eau, soit C, augmente, le fond est moins profondément perçu.

Une telle discussion peut être reprise pour l'algorithme différence M1, où apparaissent les cas 1 et 2. Les algorithmes rapport peuvent être interprétés de façon identique. Nous ne le ferons pas ici.

V-2 - Comparaison des deux méthodes

Dans ce chapitre nous supposons que chacun des algorithmes rapport et différence a été discuté, et nous chercherons à préciser, lorsqu'on est en présence du fond, dans quel domaine des valeurs de C, l'utilisation d'un

algorithme rapport est préférable à celle d'un algorithme différence, et vice-versa.

Comparons tout d'abord les figures II-6 et II-8. Pour notre modèle clair, l'utilisation d'un algorithme rapport est le plus approprié, ceci quelque soit le modèle d'absorption-diffusion choisi : au delà d'une trentaine de mètres l'erreur commise sur C est acceptable. Pour le type d'eau turbide, la différence donne de meilleurs résultats pour le modèle Y2, et pour $z > 7$ m dans le cas M1. Pour le cas moyennement turbide, les deux algorithmes se valent dans le cas M1, alors que le rapport est plus approprié pour Y2. L'examen de ces courbes indique que pour les plus faibles valeurs de C, les algorithmes rapport doivent être employés alors que pour les eaux plus productives, C élevé, l'emploi d'algorithmes différence est conseillé.

L'examen des courbes II-5 et II-7, nous permet de mieux préciser le passage de l'un à l'autre cas. Dans le cas où l'algorithme utilise une mesure, rapport au différence, peu sensible au contenu C de pigments absorbants comme c'est le cas en utilisant notre modèle d'absorption-diffusion M1, le rapport est préférable jusque $C \approx 1,5 \text{ mg.m}^{-3}$. Pour les algorithmes sensibles, comme Y2, la comparaison des deux méthodes est moins directe :

- l'algorithme rapport est conseillé jusque $C \approx 2 \text{ mg.m}^{-3}$
- au-delà de cette limite les deux méthodes sont utilisables, exemple :
 $z = 1 \text{ m}$, et $C > 3 \text{ mg.m}^{-3}$, $C' \approx C/2$ par rapport
 $C' \approx 2 \times C$ par différence.

Pour de faibles épaisseurs d'eau, $z \sim 1 \text{ m}$, l'erreur commise sur C est moindre par utilisation d'algorithmes différence.

La comparaison des différentes figures permet d'établir le schéma d'utilisation suivant

- si la valeur C à retrouver est faible, typiquement inférieure à 1 ou 2 mg.m^{-3} , il est préférable d'utiliser un algorithme rapport ;
- autrement les algorithmes différences sont préférables ;
- rappelons que dans certains cas, les algorithmes rapport et différence donnent des précisions similaires.

La valeur de C pour laquelle l'utilisation de l'algorithme différence devient préférable à celle de l'algorithme rapport dépend du modèle d'absorption-diffusion choisi : à C et b_p donnés, la valeur des coefficients d'absorption dépend fortement du modèle d'absorption choisi (cf. équation II-3 et annexe I). Cette valeur C est d'autant plus faible que l'algorithme est peu sensible.

Rappelons qu'en pratique, l'utilisation d'un rapport est préférable en cas de mesures effectuées par appareil immergé, alors qu'une différence

permet d'éliminer en grande partie, les effets perturbateurs (glitter, aérosols atmosphériques) lors de mesures aériennes ou satellitaires.

Il s'avère être nécessaire d'avoir une connaissance suffisante de la zone étudiée pour pouvoir choisir le modèle d'absorption diffusion à choisir, équation II-3a, b, ainsi que les spectres d'absorption par les constituants présents ($a_c(\lambda)$, $a_p(\lambda)$, $a_y(\lambda)$).

VI - CONCLUSION

La présence d'un fond de sable à profondeur finie peut modifier fortement la valeur C' du contenu en pigments chlorophylliens donnée, un algorithme différence ou rapport d'albédos mesurés dans le bleu et le vert, ici à 443 et 520 nanomètres.

La profondeur au delà de laquelle les algorithmes sont applicables peut être importante même en espérant retrouver C avec la précision dite en "1/4 de log.", c'est-à-dire $0,55 < \frac{C'}{C} < 1,80$: exemple : $z = 25$ m pour l'algorithme différence M1 et $C = 0,3 \text{ mg.m}^{-3}$. Nous retiendrons qu'il est préférable d'utiliser des algorithmes rapport (si les valeurs d'albédos sont bien corrigées des effets perturbateurs) pour les eaux les plus claires et des algorithmes différences dans les autres cas.

Dans les cas gênants où la profondeur est d'au moins vingt mètres, et où il y a généralement sous évaluation du contenu en pigments chlorophylliens la figure II-9 situe la marge de l'interprétation possible.

CONCLUSION

Nous avons trouvé une formule analytique qui nous a permis de simuler l'influence de la réflexion du fond sur de nombreux cas.

Puis nous avons montré les limites des conditions pour lesquelles la réflexion du fond perturbait l'extraction des paramètres marins.

Les discussions menées en II-§ V, montrent qu'il existe des conditions fortement défavorables à l'extraction des paramètres marins

1) pour les faibles profondeurs de fond, $Z \leq 2$ m, on ne peut généralement rien conclure : il peut y avoir sur ou sous estimation de C suivant l'algorithme employé ;

2) dans d'autres conditions, les très faibles concentrations en pigments chlorophylliens, $C \leq 0,5 \text{ mg.m}^{-3}$ on sous évalue C si les fonds sont situés de 25 à 100 mètres environ ; ces limites variant avec le modèle d'absorption-diffusion choisi et ce phénomène est surtout sensible pour les algorithmes différence, et plaide ainsi pour l'utilisation d'un algorithme rapport dans ces cas là ;

3) suivant le cas étudié, il peut exister des cas favorables, ou l'existence du fond marin ne modifie guère la valeur de C' retrouvée : exemple : cas Y2, algorithme rapport, si $0,5 \leq C \leq 1,2 \text{ mg.m}^{-3}$ alors $C' = C$ à moins d'un facteur multiplicatif 2, quelque soit z.

Nous devons garder à l'esprit ces trois points, lors de la recherche des paramètres marins à l'aide des mesures d'albédos à 443 et 520 nanomètres. Cependant pour la Manche et la Mer du Nord qui nous préoccupent surtout, l'examen de mesures in-situ semble montrer une diminution des limites données dans les points précédents (cf. annexe II). Par exemple pour le Détroit du Pas de Calais qui a fait l'objet de mesures in-situ, les données (comparaison de la profondeur du fond et de la turbidité, b_p) montrent que le fond ne peut être directement perçu. Cette expérience a montré également que la turbidité augmente sur les hauts fonds.

Sur les images LANDSAT que nous avons étudiées (cf. annexe III), malgré la tentative de faire apparaître l'influence du fond à l'aide d'un traitement multispectral (cf. annexe IV), il apparaît difficile de déceler l'influence directe de la réflexion du fond.

En fait les études sur LANDSAT montrent que les hauts fonds sont perçus indirectement par la turbidité due à la remise en suspension des

dépôts associés aux hauts fonds ; et apparaissant également par l'agitation de surface perceptible dans le canal proche infrarouge (voir figure 2, annexe III) : l'agitation de surface étant liée à la présence des hauts fonds par l'augmentation de la turbulence induite par les variations de la profondeur.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - R.W. AUSTIN - "Data report SCOR Discoverer expedition May 1970",
Université de Californie (1973).
- 2 - A. MOREL, L. PRIEUR - "Analyse spectrale des coefficients d'atténuation
diffuse, de réflexion diffuse, d'absorption et de rétro-
diffusion pour diverses régions marines", laboratoire
d'océanographie physique, rapport n° 17 (1975).
- 3 - A. MOREL, L. PRIEUR - "Analysis of variation in ocean color", *limnology
& oceanography*, 22, (4), 709-722 (1977).
- 4 - D.K. CLARK, E.T. BAKER, A.E. STRONG - "Upwelled spectral radiance distri-
bution and its relation to total seston in marine waters"
to be published in *Boundary Layer Meteorology*.
- 5 - G.L. CLARKE, G.C. EWING, C.J. LORENZEN - "Spectra of backscattered light
from the sea obtained from aircraft as a measure of chlo-
rophyll concentration", *Science*, 167, 1119-1121 (1970).
- 6 - J.C. ARVESEN, J.P. MILLARD, E.C. WEAVER - "Remote sensing of chlorophyll
and temperature in marine and fresh waters", *Astron. Acta*,
18, 229-239 (1973).
- 7 - J.R. MILLER, S.C. JAIN, N.T. O'NEILL, W.R. MCNEILL, K.P.B. THOMSON -
"Interprétation of airborne spectral reflectance measure-
ments over Georgian Bay", *Rem. Sensg. Environm.*, 6, 183-200
(1977).
- 8 - M. VIOLLIER - "Contribution à l'étude du rayonnement rétrodiffusé par
l'océan. - Application à la télédétection de la chloro-
phyll", Thèse de 3e cycle, Lille, n° 610 (1976).
- 9 - P.Y. DESCHAMPS, P. LECOMTE, M. VIOLLIER - "Remote sensing of ocean color
and detection of chlorophyll content", 11th Inter. Symp.
Rem. Sensg. Environm., Ann Arbor, Michigan (1977).

- 10 - M. VIOLLIER, P. LECOMTE, M. BOUGARD, A. RICHARD - "Experience aéroportée de télédétection (température et couleur de la mer) dans le détroit du Pas de Calais", Océanologica Acta, 1, (3), 265-269 (1978).
- 11 - P.G. WHITE - "High altitude remote spectroscopy of the ocean", Proc. Soc. Photo-opt. Instr. Eng. Rem. Sensg. Earth Ress. Environm., 27, (1971).
- 12 - T.M. VANSELOUS, A.J. KEMMERER, W.A. HOVIS, D.K. CLARK - "Marine applications of the Nimbus-G Coastal Color Scanner", 12th Inter. Symp. Rem. Sensg. Environm., Ann Arbor, Michigan, 621-637 (1978).
- 13 - B. MOLLER SORENSEN, B. STURM W. MEHL, G. MARRACIT - "The 1st European ocean color experiment in the Southern bight of North Sea-Eurasep project", 12th Inter. Symp. Rem. Sensg. Environm. 1431-1440 (1978).
- 14 - J.F.R. GOWER, I. DANIEL - "The use of ERTS-1 CCT's with respect to marine research", Pacific Marine Science report 74-2 (1974).
- 15 - G.A. MAUL, H.R. GORDON - "On the use of the Earth Ressources Technology Satellite in optical oceanography", Rem. Sensg. Environm., 1, 95-128 (1975).
- 16 - W. HOVIS - "The coastal zone color scanner (CZCS) experiments", 19-31, in the NIMBUS 7 user's guide NASA, G.S.F.C..
- 17 - A.Y. MOREL, H.R. GORDON - "Report of the water color working group", in J.F.R. GOWER "Passive radiometry of the ocean-Working group reports" Pacific Marine Science, report 78-28 (1978) + unpublished manuscript⁺.
- 18 - C.S. YENTSCH - "The influence of marine phytoplankton pigments on the color of the sea", Deep Sea Research, 7, 1-9 (1960).
- 19 - C.J. LORENZEN - "Extinction of light in the ocean by phytoplankton", J. Const. Int. Explor. Mer , 34, (2), 262-267 (1972).

- 20 - K.G. PRIVOZNIK, K.J. DANIEL, F.P. INCROPERA - "Absorption, extinction and phase function measurements for algal suspension of CHLORELLA PYRENSIDOSA", J.Q.S.R.T., 20, 345-352 (1978).
- 21 - D.A. KIEFER, W.H. WILSON - "Reflectance spectroscopy of marine phytoplankton : Part 1 - Optical properties as related to age and growth rate", Scripps Inst. Oceanog., SIO report 78-6 (1978).
- 22 - D. TANRE - "Etude de l'influence des aérosols sur le rayonnement terrestre rediffusé", Thèse de 3e cycle, Lille, n° 648 (1977).
- 23 - M. HERMAN, D. TANRE - "Etude des effets d'atmosphère sur les mesures de réflectance faites dans le visible à partir de satellite", rapport convention n° 77/CNES/0737, Laboratoire d'Optique Atmosphérique, Lille, septembre 1978 (1978).
- 24 - H.R. GORDON - "Removal of atmospheric effects from satellite imagery of the ocean", Appl. Opt., 17, (10), 1631-1636 (1978).
- 25 - M. VIOLLIER, D. TANRE, P.Y. DESCHAMPS - "An algorithm for remote sensing of water from space" to be published in Boundary Layer Meteorology.
- 26 - P.Y. DESCHAMPS - "Evaluation critique des performances radiométriques de l'O.C.M.", Rapport intermédiaire à l'Agence Spatiale Européenne, Laboratoire d'Optique Atmosphérique, novembre 1979 (1979).
- 27 - D.R. LYZENGA - "Passive remote sensing techniques for mapping water depth and bottom features", Appl. Opt., 17 (3), 379-383 (1978).
- 28 - D.R. LYZENGA, R.A. SCHUMMAN, R.A. ARNONE - "Evaluation of an algorithm for mapping bottom features under a variable depth of water", 13th Inter. Symp. Rem. Seng. Environm., Ann Arbor, Michigan (1978).
- 29 - G.N. PLASS, G.W. KATTAWAR - "Radiative transfer in an atmosphere-ocean system", Appl. Opt., 8, (2), 455-466 (1959).

- 30 - G.N. PLASS, G.W.KATTAWAR - "Monte Carlo calculations of radiative transfer in the Earth's atmosphere-ocean system : I - flux in the atmosphere and ocean", J. Phys. Oceanog., 2, 139-145 (1972).
- 31 - H.R. GORDON, O.B. BROWN - "Irradiance reflectivity of a flat ocean as a function of the optical properties", Appl. Opt., 12 (7), 1549-1551 (1973).
- 32 - S.C. JAIN, J.R. MILLER - "Algebraic expression for the diffuse irradiance reflectivity of water from the two-flow model", Appl. Opt. 16 (1), 202-204 (1977).
- 33 - G.N. PLASS, G.W. KATTAWAR - "Color of the ocean", Appl. Opt., 17 (9), 1432-1446 (1978).
- 34 - H.R. GORDON, O.B. BROWN - "Influence of bottom depth and albedo on the diffuse reflectance of a flat homogeneous ocean", Appl. Opt. 13 (9), 2153-2159 (1974).
- 35 - H.R. GORDON, O.B. BROWN - "Diffuse reflectance of the ocean : some effects of vertical structure", Appl. Opt., 14 (12), 2892-2895 (1975).
- 36 - H.R. GORDON - "Remote Sensing of Optical Properties in Continuously Stratified Waters", Appl. Opt., 17 (12), 1893-1897 (1978).
- 37 - G. KULLENBERG, N.B. OLSEN - "A comparison between observed and computed light scattering functions - II", Kobenhavns Universitet, Institut for Fysisk Oceanografi, Rep. 19 (1972).
- 38 - G. KULLENBERG - "Observed and computed scattering functions", in "Optical aspects of oceanography", N.G. JERLOV & E. STEEMANN NIELSEN Academic Press, 25-49 (1974).
- 39 - A. MOREL - "Diffusion de la lumière par les eaux de mer-résultats expérimentaux et approche théorique", Agard Lectures Series n° 61 on Optics of the Sea (1973).

- 40 - E.P. SHETTLE, J.A. WEINMAN - "The transfer of solar irradiance through inhomogeneous turbid atmosphere evaluated by Eddington's approximation", J. Atmosph. Sciences, 27, 1018-1055 (1970).
- 41 - C. BROGNIEZ - "Calcul approché des flux radiatifs en milieu diffusant - Application aux mesures de VENERA 8", Thèse de 3e cycle, Lille, n° 533 (1975).
- 42 - W.J. WISCOMBE, G.W. GRAMS - "The backscattered fraction in two-stream approximation", J. Atmosph. Science, 33, 2440-2451 (1976).
- 43 - L. PRIEUR - "Transfert radiatif dans les eaux de mer. Application à la détermination de paramètres optiques caractérisant leur teneur en substances dissoutes et leur contenu en particules" Thèse d'état, Paris VI, n° CNRS : A.O. 12187.
- 44 - C. DEVAUX - "Contribution à l'étude de la couverture nuageuse de Vénus par l'analyse des mesures photométriques et des profils de flux solaire transmis", Thèse de Docteur ès Sciences Physique, Lille, n° 383 (1977).
- 45 - S.C. JAIN, J.R. MILLER - "Substances water parameters : Optimization approach to their determination from remotely sensed water color data", Appl. Opt., 15 (4), 886-890 (1976).
- 46 - H.R. GORDON - "Simple calculation of the diffuse reflectance of the ocean", Appl. Opt., 12, 2803-2804 (1973).
- 47 - J. LENOBLE - Cours de D.E.A., année 76-77.
- 48 - R.W. PREISENDORFER - "Hydrologic optics", vol. 5, NOAA-ERI, Honolulu, Hawaii (1976).
- 49 - D.R. LYZENGA - "Reflectance of a flat ocean in the limit of zero water depth", Appl. Opt., 16 (2), 282-283 (1977).
- 50 - S. CHANDRASEKHAR - "Radiative transfert", Dover Publications inc., New York (1960).

- 51 - R.W. AUSTIN - "The remote sensing of spectral radiance from below the ocean surface", in "Optical Aspects of Oceanography", N.G. JERLOV & E. STEEMANN NIELSEN, Academic Press, 317-344 (1974).
- 52 - N.G. JERLOV - "Significant relationships between optical properties of the sea", in "Optical Aspects of Oceanography", N.G. JERLOV & E. STEEMANN NIELSEN, Academic Press, 77-94 (1974).
- 53 - N. BAUSSART - "Etudes de mesures expérimentales de l'eau de mer (DISCOVERER 1970) pour l'amélioration des techniques de télé-détection de la couleur de l'océan", rapport de DEA (1977).
- 54 - V. ROMANOVSKY - "Les Océans", Presse Universitaire de France, collection "Que Sais-je ?", n° 92 (1969).
- 55 - F.B. POLCYN, D.R. LYZENGA - "Calculations of water depth from ERTS-MSS Data", Symposium on Significant Results Obtained from the ERTS-1, vol. I-B, 1433-1441 (1973).
- 56 - F.B. POLCYN, D.R. LYZENGA - "Multispectral sensing of water parameter", Rem. Seng. and water Resources Management, 17, 394-403 (1973).
- 57 - W.A. HOVIS, K.A. LEUNG - "Remote sensing of ocean color", Optical Engineering, 16 (2), 158-166 (1977).
- 58 - Y.F. THOMAS - "Utilisation des données Landsat pour la mise en évidence de la turbidité en zones littorales ; limites des méthodes" Publ. Sci. Tech. CNEXO, Actes Colloq. n° 5, 109-121 (1978).
- 59 - R.J. HOLYER - "Toward Universal Multispectral Suspended Sediment Algorithms", Rem. Sensg. Environm., 7, 323-338 (1978).
- 60 - J.C. MUNDAY Jr, T.T. ALFOLDI - "Landsat Test of diffuse reflectance models for aquatic suspended solids measurements", Rem. Sensg Environm., 8, 169-183 (1979).

- 61 - M. HERMAN - "Contribution à l'étude du transfert radiatif dans un milieu diffusant et absorbant. - Propositions données par la Faculté"., Thèses Docteur ès-Sciences Physiques, Lille, n° 177 (1968).
- 62 - A. BRICAUD - "Absorption, diffusion (et rétrodiffusion) de la lumière par les substances influant sur la couleur des eaux de mer - première étude", Thèse de Docteur de 3e cycle, Paris VI, (1979).
- 63 - Anonyme - "Format specifications for LANDSAT MSS system corrected computer compatible tapes", Telespazio, DPS.SES.NT/O230.02/200/576, Rome, May 1976.
- 64 - M. VIOLLIER, P.Y. DESCHAMPS, P. LECOMTE - "Airborne remote sensing of chlorophyll content under cloudy sky as applied to the tropical waters in the gulf of Guinea", Remote Sensing Environm., 7, 235-248 (1978).

"ANNEXES"

ANNEXE I

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES METHODES DE DOSAGE DES
CONSTITUANTS DE L'EAU DE MER ET SUR LEUR COEFFICIENT
D'ABSORPTION OPTIQUE

M. VIOLLIER, N. BAUSSART

-.-.-.-

I - LES DIVERS CONSTITUANTS DE L'EAU DE MER

On fera la distinction entre matières en solution et matières en suspension d'une part, et entre matières minérales et organiques d'autre part.

A) - Matières en solution

1 - Les sels minéraux : les éléments principaux sont les chlorures et les sulfates ; en plus faible concentration, variables dans le temps et l'espace les sels nutritifs (nitrites, nitrates, phosphates, silicates) ont, par contre, une importance fondamentale pour la biologie végétale et toute la chaîne de productivité.

2 - Les substances organiques dissoutes : elles sont communément appelées substances jaunes et sont constituées de produits de dégradation d'origine végétale ; on les rencontre essentiellement dans les eaux côtières, ou dans les régions de forte production biologique.

B) - Matières en suspension

1 - Les sédiments du fond de la mer, remis en suspension, proviennent soit de l'érosion du continent, soit de la décomposition des squelettes d'animaux, ils sont classés suivant leur granulométrie en sable, vase ou argile.

2 - Les matières organiques : il existe évidemment une multitude d'espèces animales (zooplancton, necton) et végétales (phytoplancton). Nous nous intéresserons essentiellement au phytoplancton, à cause de son influence prépondérante sur les propriétés optiques et sur la production biolo-

gique. Le phytoplancton est constitué d'algues, pour la plupart unicellulaires, que l'on classe suivant quelques types : diatomée, chrysophyte, dinoflagellées.... Les cellules contiennent des molécules pigmentaires que l'on peut mettre en évidence après broyage, extraction à l'alcool ou l'éther, et séparation par chromatographie. On les distingue par leur région spectrale d'absorption. La figure 1 montre les spectres d'absorption des pigments photosynthétiques principaux (chlorophylle) et accessoires. Il existe également des pigments non photosynthétiques (la pheophytine) qui remplace la chlorophylle dans les vieilles populations. Les courbes présentées ont été obtenues à l'aide de traitements chimiques compliqués et correspondent nécessairement à des solutions organiques (éther, alcool, acétone). Il convient donc de rechercher des méthodes adaptées aux analyses in situ. C'est ce qui sera étudié dans les prochaines sections de ce texte.

II - LE DOSAGE DES CONSTITUANTS

En reprenant l'ordre qui vient d'être établi, nous examinerons les mesures qui sont les plus couramment pratiquées en mer.

A) La salinité : basée sur la mesure de la conductivité électrique de l'eau de mer, la salinité est facilement et couramment mesurée.

B) Les sels nutritifs : étant donné leur rôle fondamental en écologie marine, les mesures des nitrates, nitrites, phosphates et silicates sont devenues assez courantes et des chaînes de dosage ont été spécialement conçues ("Technicon") ; le processus est le suivant : prélèvements (2 litres), filtration et congélation à bord, dosage des filtrats par méthode colorimétrique. Les concentrations sont exprimées en μ atgramme / litre (typiquement quelques μ atgr./litre).

C) Les substances jaunes : il n'existe pas de méthode de mesure opérationnelle ; la seule méthode de mesure est optique : le groupe de travail du congrès de l'I.U.C.R.M. (GOWER, 1978) a préconisé la mesure du coefficient d'absorption (m^{-1}) à 350 nm. On opère de la manière suivante : filtration très serrée du prélèvement, mesure de l'atténuation de l'eau filtrée, soustraction de l'absorption par l'eau pure. Ces opérations sont longues et délicates, c'est ce qui explique que les mesures de substances jaunes soient extrêmement rares.

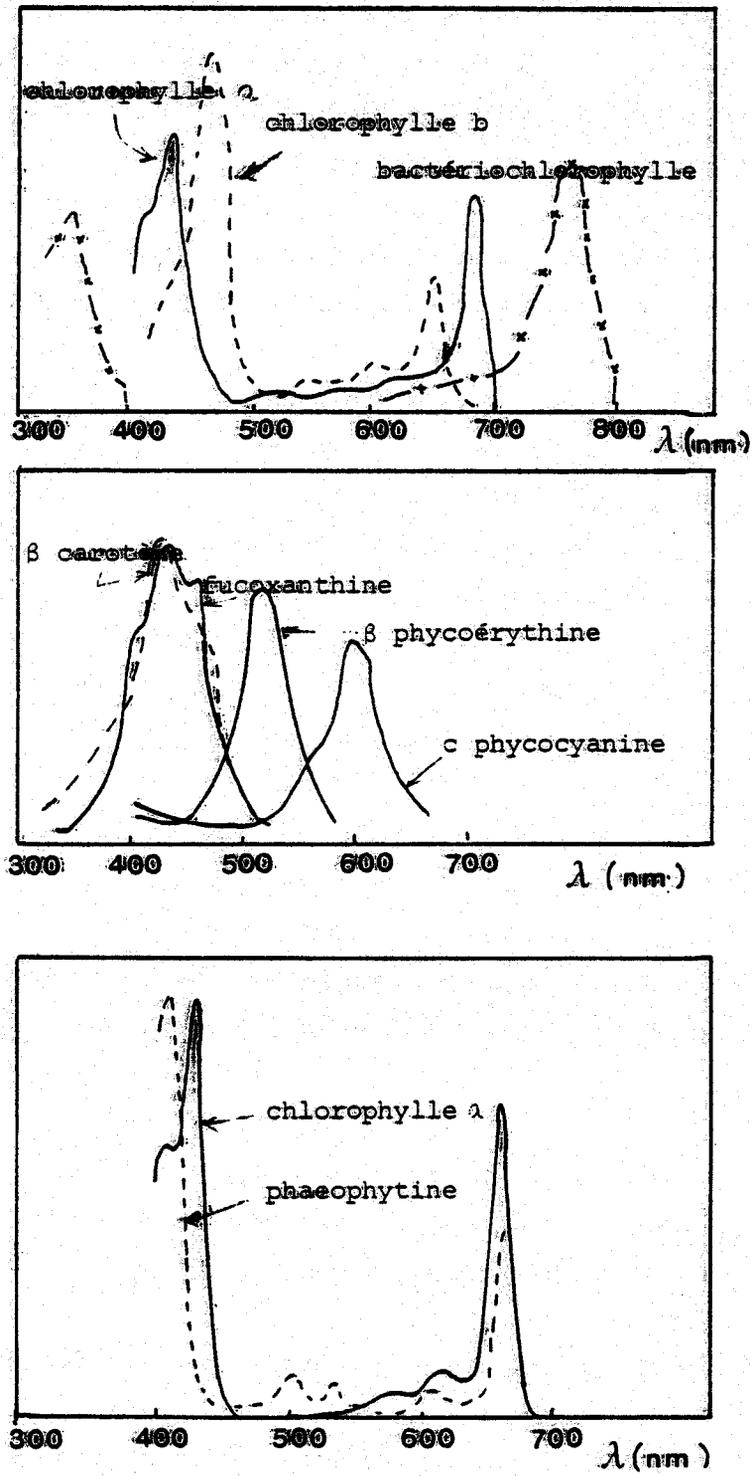


FIGURE 1 - Absorption relative des principaux pigments végétaux en solution organique (alcool, éther)

- a - Pigments photosynthétiques principaux
- b - Pigments photosynthétiques accessoires
- c - Comparaison entre la phaeophytine (non photosynthétique) et la chlorophylle dans BOGORAD (1962).



D) - Matières en suspension (minérales + organiques)

1 - par pesée : on opère de la manière suivante : prélèvements (2 litres), filtration sur filtre prépesé, rinçage du filtrat pour éliminer le sel, passage à l'étuve pendant 24 heures, nouvelle pesée ; la différence de poids fournit la concentration (mg/l) en matière en suspension, encore appelée seston. Cette mesure est également délicate à effectuer, le résultat dépend fortement du mode opératoire : choix des filtres, procédé de rinçage, de chauffage, etc...

2 - par diffusion optique : le prélèvement est placé dans un faisceau de lumière blanche et on mesure la quantité de lumière diffusée à 45°. On obtient une mesure de turbidité relative par comparaison à un échantillon témoin.

Par ailleurs, des dispositifs de mesure in situ, sont en cours d'étude, mais ne semblent pas encore opérationnels.

3 - par microgranulométrie : l'appareil employé (compteur Coulter) donne le nombre de particules par litre, ainsi que leur répartition en taille. L'information est extrêmement riche, mais l'usage de cette instrumentation est limité à quelques rares spécialistes.

E) - Matières organiques en suspension

Les précédentes méthodes ne permettent pas de distinguer entre le minéral et l'organique. Le dosage de la chlorophylle est un moyen indirect d'approximer la quantité de matière organique.

Parmi les pigments présents dans le phytoplancton, on ne dose couramment que la chlorophylle "a" et la pheophytine.

1 - Dosage de la chlorophylle "a"

On opère de la manière suivante :

- prélèvement (1 à 2 litres), filtration immédiate, addition d'un produit basique pour éviter l'apparition de phaeophytine, congélation jusqu'au laboratoire ;
- dilution du filtre dans l'acétone, broyage des cellules par centrifugation ;
- l'extrait obtenu peut alors être dosé par méthode spectrophotométrique ou fluorimétrique.

Méthode spectrophotométrique : elle est basée sur la mesure de la densité optique de l'extrait à 665 nm (bande d'absorption de la chlorophylle) corrigée des effets de turbidité par la densité optique à 750 nm.

Méthode fluorimétrique (TURNER) : l'extrait est excité en lumière bleue (430 nm) et on enregistre l'émission à 670 nm ; la concentration en chlorophylle est calculée avec des formules où interviennent l'intensité de l'émission et un coefficient de calibration. Pour éviter les dérives instrumentales d'une part, et parce que les propriétés de fluorescence peuvent dépendre de l'état de la population de phytoplancton, il est nécessaire de calibrer l'instrument par comparaison avec des mesures spectrophotométrique.

La précision des dosages de chlorophylle est généralement faible, car le mode opératoire (filtration, extraction) joue un très grand rôle. On peut considérer que les mesures effectuées par un laboratoire bien entraîné sont fidèles à quelques pour cents. Mais si on compare des mesures de diverses origines, on constate facilement des erreurs d'un facteur 2.

Il existe une méthode de dosage de la chlorophylle in situ à l'aide de la fluorescence. Le principe est le même que pour les extraits acétoniques, sauf que l'émission est plus faible et légèrement déplacée vers l'infrarouge (685 nm). La méthode a l'avantage de donner une mesure en continu, mais présente plusieurs inconvénients 1) on ne distingue pas chlorophylle et phaeopigments 2) la mesure est influencée par la turbidité 3) la mesure dépend de l'état de la population du phytoplancton, et doit être calibrée par des mesures fréquentes sur prélèvements.

2 - Dosage de la phaeophytine

Les procédés de filtration et d'extraction sont identiques. Mais avant le dosage, l'extrait est acidifié, ce qui a pour effet de transformer la chlorophylle en phaeopigments. Le principe du dosage par spectrophotométrie ou fluorimétrie reste pratiquement inchangé. On relie la concentration en phaeophytine aux mesures avant et après acidification.

III - LES SPECTRES D'ABSORPTION

Les coefficients d'absorption ne peuvent être connus que par l'intermédiaire d'une mesure de transmission ou de réflectance dans lesquels le phénomène de diffusion joue le principal rôle. Il ne faut pas perdre de vue cette difficulté, qui explique que même le coefficient d'absorption de l'eau pure ne soit connu qu'avec une précision de 20 %.

Suivant l'ordre des deux précédents paragraphes, on écrira le coefficient de l'eau de mer comme la somme

$$a(\lambda) = a_o(\lambda) + a_S^M(\lambda) + a_S^O(\lambda) + a_P^M(\lambda) + a_P^O(\lambda)$$

où $a_o(\lambda)$ correspond à l'eau pure
 $a_S^M(\lambda)$ aux substances minérales dissoutes
 $a_S^O(\lambda)$ aux substances organiques dissoutes
 $a_P^M(\lambda)$ aux particules minérales en suspension
 $a_P^O(\lambda)$ aux particules organiques en suspension.

A)-Pour les substances dissoutes, il est possible de mesurer le coefficient d'absorption en purifiant l'eau de mer par plusieurs filtrations. A l'aide de mesure de simples transmissions, on déduit ainsi que :

- les sels minéraux dissous ont une absorption négligeable dans le visible (mais absorbent dans l'U.V.)

$$a_S^M(\lambda) = 0$$

- les substances jaunes ont un spectre d'absorption non négligeable, suivant une décroissance exponentielle vers le rouge

$$a_S^O(\lambda) = a_S^O(\lambda_o) \exp \{ 0.0145(\lambda_o - \lambda) \}$$

B)-Pour les particules en suspension, le problème est beaucoup plus complexe, particulièrement la distinction entre le minéral et l'organique, puisqu'il faut tenir compte d'abord de la diffusion par les particules, et ensuite de l'absorption par les substances dissoutes. Comme en témoigne l'étude bibliographiques qui suit, il n'existe actuellement aucune réponse à ce problème. De grandes divergences apparaissent entre les spectres d'absorption donnés par les différents auteurs.

Nous ferons référence aux travaux suivants :

- YENTSCH, Woods Hole Oceanographic Institution, 1960.
- LORENZEN, Woods Hole Oceanographic Institution, 1972.
- HOJERSLEV, Université de Copenhague, 1973.
- DUNTLEY, AUSTIN, KIEFER, WILSON, SMITH, BAKER, Scripps Institution of Oceanography, 1974, 1978.
- MOREL, PREEUR, Station Marine de Villefranche Sur Mer, 1977.
- BRICAUD, Station Marine de Villefranche Sur Mer, 1979.

- VANDER PIEPEN, I.W. DEMING, Nasa Goddard, 1977.
- PRIVOZNIK, DANIEL, Incropera, Perdue University, 1978.

1 - Méthodes de mesures

Nous examinons d'abord les méthodes expérimentales qui ont été employées.

1ère méthode "Mesure classique de transmission"

Le prélèvement est concentré par centrifugation puis placé dans la cuve (quelques cms) d'un spectromètre. On mesure de cette manière le coefficient d'extinction

$$C^\lambda = a^\lambda + b^\lambda$$

Les diverses mesures (en particulier VANDER PIEPEN, 1977) montrent des spectres quasiment non sélectifs, variant grossièrement comme λ^{-1} , montrant donc essentiellement les variations du coefficient de diffusion b^λ ($b^\lambda \gg a^\lambda$). Comme la mesure de b^λ , qu'il est nécessaire de soustraire à C^λ , n'est pas précise, cette méthode n'aboutit qu'à de médiocres résultats.

2ème méthode "Absorption diffuse"

Afin de tendre vers la mesure du coefficient d'absorption, on peut élargir l'angle de réception sur la photodétection du spectromètre de façon à recevoir la partie du rayonnement diffusé vers l'avant, partie qui représente la majeure partie du rayonnement diffusé. Suivant le dispositif optique employé, on tend avec plus ou moins de perfection à mesurer directement le coefficient d'absorption. En employant cette méthode, on obtient des spectres sélectifs, mettant en évidence les bandes de la chlorophylle. La valeur absolue du coefficient d'absorption est cependant affectée d'une certaine incertitude, puisqu'on ne connaît pas l'efficacité avec laquelle la diffusion n'a pas été prise en compte. Cette incertitude, qui n'est que rarement évaluée par les auteurs, dépend du dispositif instrumental, mais peut aussi dépendre du type de phytoplancton (si les fonctions de diffusion sont différentes) et de sa concentration (diffusion multiple). Il existe aussi un autre point d'interrogation concernant l'absorption par les substances dissoutes, dont l'estimation n'est généralement pas faite.

3ème méthode "Méthode du filtre éclairci"

L'originalité de cette méthode provient du fait que la mesure de transmission s'effectue directement sur le filtre sur lequel les particules se sont agglomérées, et non sur la suspension. Les phénomènes de diffusion sont atténués en éclaircissant le filtre par un solvant d'indice optique proche de celui des particules. Cette solution paraît la plus satisfaisante car le problème de l'absorption par les substances dissoutes ne se pose plus. Elle peut cependant être critiquée à cause de l'influence que peut avoir le type du filtre sur la mesure et également parce que c'est la méthode "in vitro" la plus éloignée des conditions "in situ".

4ème méthode "Mesure de l'éclairement scalaire (ou sphérique)"

Le principe de la méthode est basée sur la relation de divergence, qui s'écrit, lorsque le milieu est horizontalement stratifié

$$\frac{d}{dz} (E_d \cdot E_u) = - a(z) E_o(z)$$

où E_d et E_u sont les éclairements plan, respectivement descendant et montant, et E_o l'éclairement scalaire.

Simple dans son principe, cette méthode est difficile à appliquer expérimentalement parce que la fabrication d'un capteur d'éclairement scalaire est problématique. A notre connaissance, seul HOJERSLEV (1973) a expérimenté cette méthode à l'aide d'un capteur de flux sphérique de sa fabrication.

En fait, cette méthode est plutôt utilisée en évaluant indirectement E_o , à l'aide d'une relation du type

$$E_o = \frac{E_d}{\bar{\mu}_d} + \frac{E_u}{\bar{\mu}_u}$$

où $\bar{\mu}_d$ et $\bar{\mu}_u$ sont les cosinus moyens relatifs au champ descendant et ascendant.

Compte-tenu des expressions de la réflectance

$$R(z) = E_u/E_d$$

et du coefficient d'atténuation diffus

$$K_d = \frac{d}{dz} \frac{E_d}{E_d} \times \frac{1}{E_d}$$

on obtient, après élimination des termes de second ordre ($R(z) < 0.1$)

$$a(z) = K_d(z) \cdot \bar{\mu}_d \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\bar{\mu}_d}{\bar{\mu}_u} + 1 \right) R(z) \right\}$$

On suppose d'autre part que cette relation vraie au niveau z , reste valable pour une couche de plusieurs mètres.

Les mesures de K_d et de R , et le calcul approximatif de $\bar{\mu}_u$ et de $\bar{\mu}_d$ permettent de calculer K_d . Les valeurs de $\bar{\mu}_u$ varient peu autour de 0,4, celles de $\bar{\mu}_d$ varie entre 1 (éclairage à angle droit) à 0,64 (éclairage diffus). Le résultat dépend donc principalement de la valeur de $\bar{\mu}_d$. Approximativement la relation est comprise entre $a = K_d$ et $a = 0,5 K_d$.

En résumé, le coefficient d'absorption peut se déduire des mesures de la transmission diffuse et de la réflectance, celle-ci n'intervenant que dans un terme correctif.

2 - Définition d'un coefficient spécifique

Lorsqu'on a réussi à obtenir un spectre d'absorption, une autre difficulté expérimentale apparaît : à quels constituants peut-on affecter l'absorption mesurée ?

Devant le petit nombre des moyens d'analyse la réponse est nécessairement simplifiée

- pour les particules minérales : comme la distinction entre le minéral et l'organique n'est généralement pas fait, on ne peut faire que les hypothèses

$$\text{ou } a_p^m \ll a_p^o$$

$$\text{ou } a_p^m = m_1 \cdot b_p^m$$

où m est une constante, et b_p^m le coefficient de diffusion, lié à la concentration en particules ;

- pour les matières organiques : la chlorophylle "a" (éventuellement les phacpigments) est souvent le seul dosage disponible. On est donc conduit à exprimer a_p^o sous la forme

$$a_p^o = m_2 \cdot b_p^o + C \cdot a_c$$

où le premier terme concerne l'absorption pour tout constituant autre que chlorophyllien, et qu'on peut considérer proportionnel à la diffusion,

et le second terme concerne l'absorption par la chlorophylle.

En fait, à l'exception des eaux pour lesquelles on possède des connaissances préalables, on mêle finalement substances dissoutes, particules minérales et particules organiques (MOREL et PRIEUR, 1977).

$$a_S + a_p^M + a_p^O = m b_p + C. a_c$$

en faisant ainsi l'hypothèse d'une covariance générale des composants.

A noter que SMITH et BAKER (1978) ont suggéré la relation

$$a_S + a_p^m + a_p^o = C. a_1 \text{ pour } c < 1 \text{ mg/m}^3$$

et

$$a_S + a_p^m + a_p^o = a_S + C. a_2 \text{ pour } C > 1 \text{ mg/m}^3$$

signifiant que la covariance entre la chlorophylle et les substances dissoutes existerait plus vraisemblablement pour les faibles concentrations en pigments.

Malgré de petites divergences sur les définitions, nous arrivons finalement à la conclusion que le seul coefficient d'absorption spécifique mesuré commun aux différentes études est le coefficient relatif à la chlorophylle a (+ éventuellement les phaeopigments).

L'examen rapide des spectres réunis sur la figure 2 montrent qu'on est bien loin de trouver un accord sur les valeurs de a_c . On obtient certes un certain accord qualitatif : 2 maxima relatifs à 440 nm et 675 nm, un minimum vers 600 nm. Mais les spectres diffèrent notablement si on examine les valeurs absolues, et aussi l'index de sélectivité r que nous définirons comme

$$r = \frac{a_c(440)}{a_c(600)}$$

Le spectre de YENTSCH (1962) est le plus sélectif : $r = 10$ (figure 2a). La méthode expérimentale employée est celle du filtre éclairci (3ème méthode), méthode assez éloignée des conditions in situ, mais satisfaisante quant à l'élimination de l'absorption par les substances dissoutes et de la diffusion. Dans le même article, YENTSCH démontre une excellente corrélation entre la chlorophylle brute (diverses chlorophylles et caroténoïde) et la chlorophylle "a".

A l'opposé le spectre de MOREL et PRIEUR (1977) est le moins

sélectif : $r = 2,5$ (figure 2a). Ce spectre est le seul, dans la littérature qui provienne de mesures sur le milieu réel, et non sur des cultures en laboratoire. La méthode utilisée est celle de transmission diffuse (4ème méthode), fournissant théoriquement une bonne précision. La généralité de ce spectre demande cependant confirmation car il a été établi à l'aide de quelques stations provenant d'une seule campagne.

La figure 2b montre les spectres de DUNTLEY et al, qui ont été obtenus à l'aide de mesures de transmission et de réflexion diffuse, et qui concernent 9 espèces de phytoplancton cultivées en laboratoire. Cinq espèces en majorité (des diatomées) ont des spectres assez semblables (confondus avec la partie hachurée de notre figure 2b) et très proches de celui de MOREL et PRIEUR. Les autres spectres (1, 3, 4 des dinoflagellées, 2 un chrysophyte) présentent des absorptions plus fortes et plus variées.

Sur les figures 2c et 2d, on montre les résultats de KIEFER et WILSON (1978) obtenus suivant la même méthode que précédemment. L'originalité de ce travail vient de ce que les spectres d'absorption ont été pris au cours des différentes phases de la croissance des cultures. On dispose ainsi de spectres correspondant à des cultures à différents âges (fig. 2c) ou à différents taux de production (fig. 2d). On peut constater que les valeurs des coefficients d'absorption sont très variables, le coefficient de sélectivité variant entre 4 et 10. Les dosages en carotène et en phaeopigments n'ont pas été faits, mais les auteurs attribuent ces écarts aux variations du rapport chlorophylle "a" / caroténoïde, les pertes de chlorophylle "a" avec l'âge seraient plus élevées que les pertes en caroténoïde.

Mentionnons également les travaux de LORENZEN (1974) et de PRIVOZNIK et al (1978) qui donne également des spectres d'absorption de culture de phytoplancton (2ème méthode "absorption diffuse"). On ne dispose dans leur cas que des valeurs relatives de leur spectre, et seul le coefficient de sélectivité peut être comparé aux précédentes données : respectivement 2 et 4 pour ces deux auteurs.

Enfin la thèse récente de A. BRICAUD (1979) que nous avons reçue après rédaction de la majeure partie de ce rapport constitue une excellente mise au point sur le sujet. De ce travail nous avons extrait la figure 3 qui montre des signatures spectrales de 5 espèces de phytoplancton présentant un coefficient moyen de sélectivité $r = 6$, soit une valeur intermédiaire entre les spectres de MOREL et PRIEUR et de YENTSCH.

IV - CONCLUSION

Les valeurs spécifiques de l'absorption par les différents consti-

tuants de l'eau de mer ne sont pas encore bien déterminées.

Les travaux se heurtent à une double difficulté expérimentale :

- 1 - conception de la mesure de l'absorption
- 2 - analyse quantitative des nombreux constituants.

En premier lieu, des difficultés subsistent pour discerner les absorptions par

- 1 - les substances organiques dissoutes
- 2 - les particules minérales
- 3 - les particules organiques.

En second lieu, de grandes divergences apparaissent sur les mesures de l'absorption par les pigments chlorophylliens, qui sont pourtant les mesures les mieux définies.

Bien que la possibilité d'erreur expérimentale ne soit pas à exclure, les divergences proviennent probablement du fait qu'on ne distingue pas la part de chacun des pigments : chlorophylle a, b, c, carotène, phaeopigments, etc... C'est ce que nous suggère la figure 2c, où on constate que le spectre varie avec l'âge de la population, probablement à cause de variations dans la teneur relative des pigments.

Pour une population naturelle on peut cependant supposer que les concentrations en pigments accessoires et principaux sont statistiquement corrélées, ce qui justifierait l'emploi d'un coefficient spécifique moyen de chlorophylle dans les modèles d'interprétation de la couleur de l'océan.

REFERENCES

- BOGORAD , 1962 - Physiology and biochemistry of algae. Ed. Lewin Acedemic Press Londonond New York.
- BRICAUD A., 1979 - Absorption, diffusion (et rétrodiffusion) de la lumière par les substances influants sur la couleur des eaux de mer. Thèse de 3e cycle, Université de Paris VI.
- DUNTLEY S.Q., WILSON W.H. and EDGERTON C.F., 1974 - Ocean Color Analysis, part 1 - Scripps Inst. Oceanogr. 74-10.
- GOWER J.F.R., 1978 - Passive radiometry of the ocean. - Working Group Report. Colloquium of the Inter Union Commission on Radio Meteorology - Unpublished Manuscript.
- HOJERSLEV N.K., 1973 - Inherent and apparent optical properties of the Western Mediterranean and the Hardangerfjord. Report 21 - Institute of Physical Oceanography, University of Copenhagen.
- KIEFER D.A. and WILSON W.H., 1978 - Reflectance spectroscopy of marine phytoplankton. - part 1 - Scripps Inst. Oceanogr. 78-6.
- LORENZEN C.J., 1972 - Extinction of light in the ocean by phytoplankton. - J. Cons. Int. Explor. Mer 34 : 262-267.
- MAZLIAK P., 1974 - Physiologie végétale. Nutrition et métabolisme. Hermann Paris, 350 pages.
- MOREL A. et PRIEUR L., 1977 - Analysis of variations in ocean color. - Limnology and Oceanography 5, 22 : 709-722.
- PRIVOZNIK K.G., DANIEL K.J. and INCROPERA F.P., 1978 - Absorption extinction and phase function measurements for algal suspensions of chlorella pyrenoidosa. - J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 20 : 345-352.
- SMITH R.C. and BAKER K.S., 1978 - Optical classification of natural waters. - Limnology and Oceanography 5, 23 : 260-267.
- VAN DER PIEPEN H. and DEMING J.W., 1977 - A study of the optical properties of algae in water. - Nasa Goddard Space Flight Center. - Ref. X 941-77-106.
- YENTSCH C.S., 1960 - The influence of phytoplankton pigments on the colour of sea water. Deep Sea Res. 7 : 1-9.

Légende de la figure 2

a - Spectre de YENTSCH (1962)

Méthode : filtre éclairci

Espèce : population naturelle des eaux de Woods Hole

Spectre de MOREL et PRIEUR (1977)

Méthode : atténuation diffuse in situ

Eaux des upwellings au large de la Mauritanie

b - Spectre de DUNTLEY et al (1974)

Méthode : transmission et réflexion diffuse sur cultures en laboratoire

Espèces : 1 Gonyaulax polyedra (dinoflag, "eaux rouges")

2 Coccolithus huxlegi (chrysophyte)

3 Gymnodinium species (dinoflag)

4 Gymnodinium splendens (dinoflag)

5 la partie hachurée enveloppe les spectres des cinq espèces suivantes : Nitzschia closterium, Lauderia borealis, Cyclotella mana, Skelotonema costatum (toutes diatomées), Monochrysis lutheri (chrysophyte).

c - Spectres de KIEFER et WILSON 1978

Méthode : même que pour b

Espèce : Thalassissiora pseudonana (diatomée)

Les deux courbes correspondent à des populations d'âge différent : 7 et 11 jours.

d - même que c sauf :

Espèce : Monochrysis lutheri (chrysophyte)

Les 2 courbes correspondent à des taux de production différents : doublement de la masse organique en 14 heures et 420 heures.

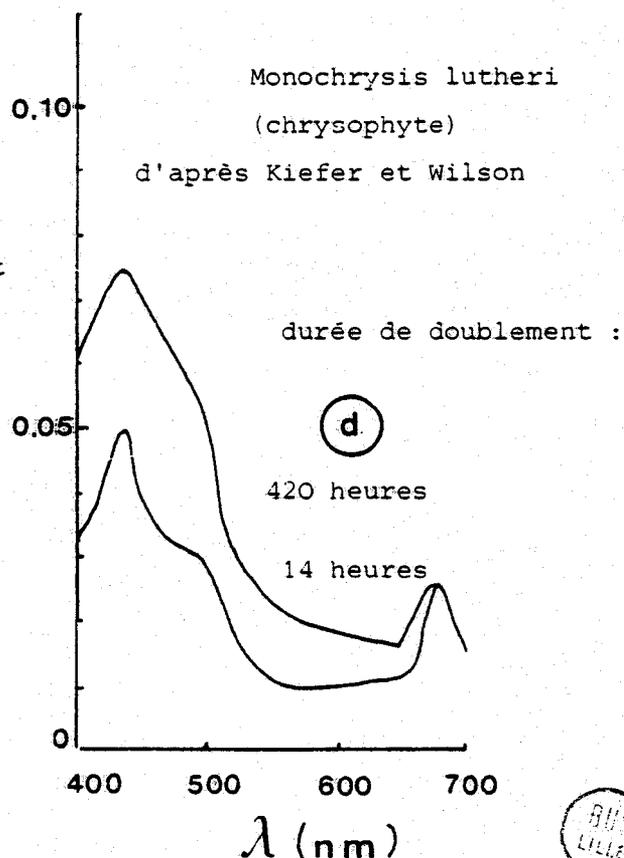
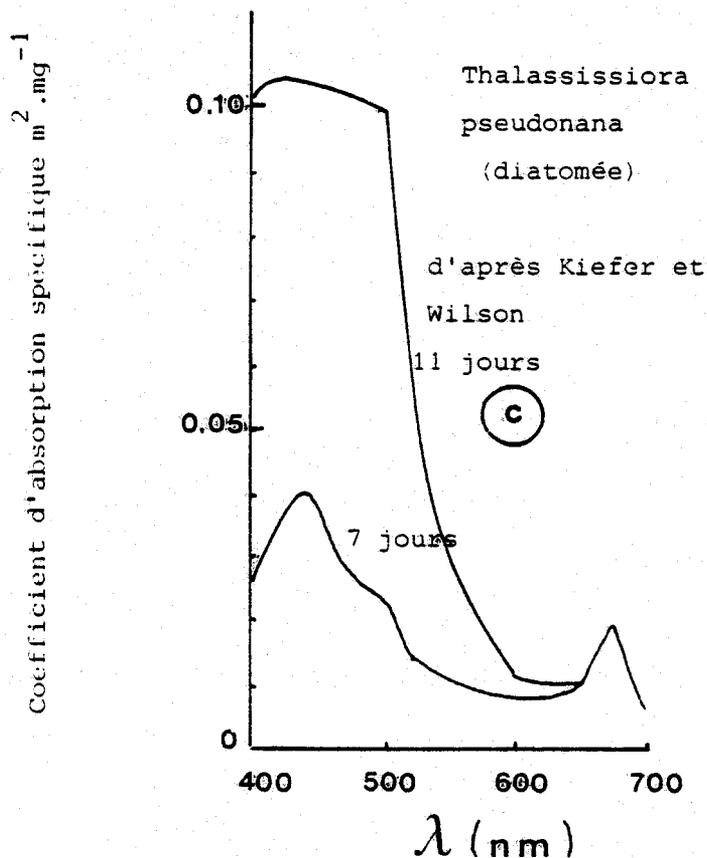
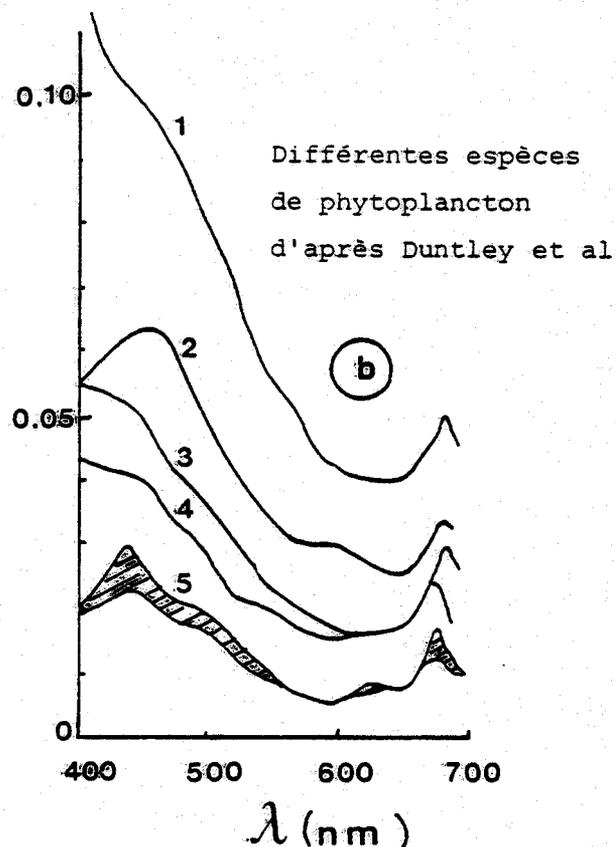
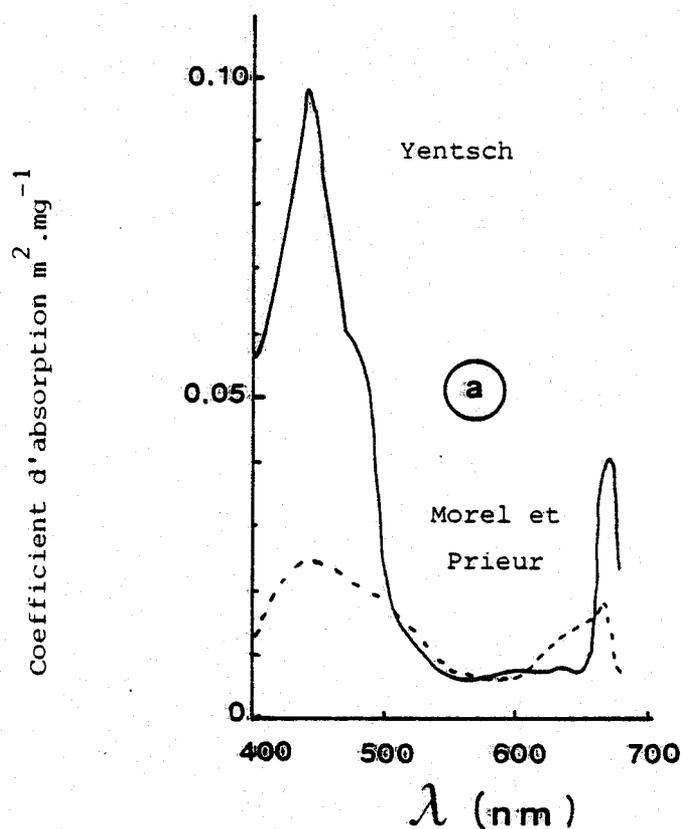


FIGURE 2



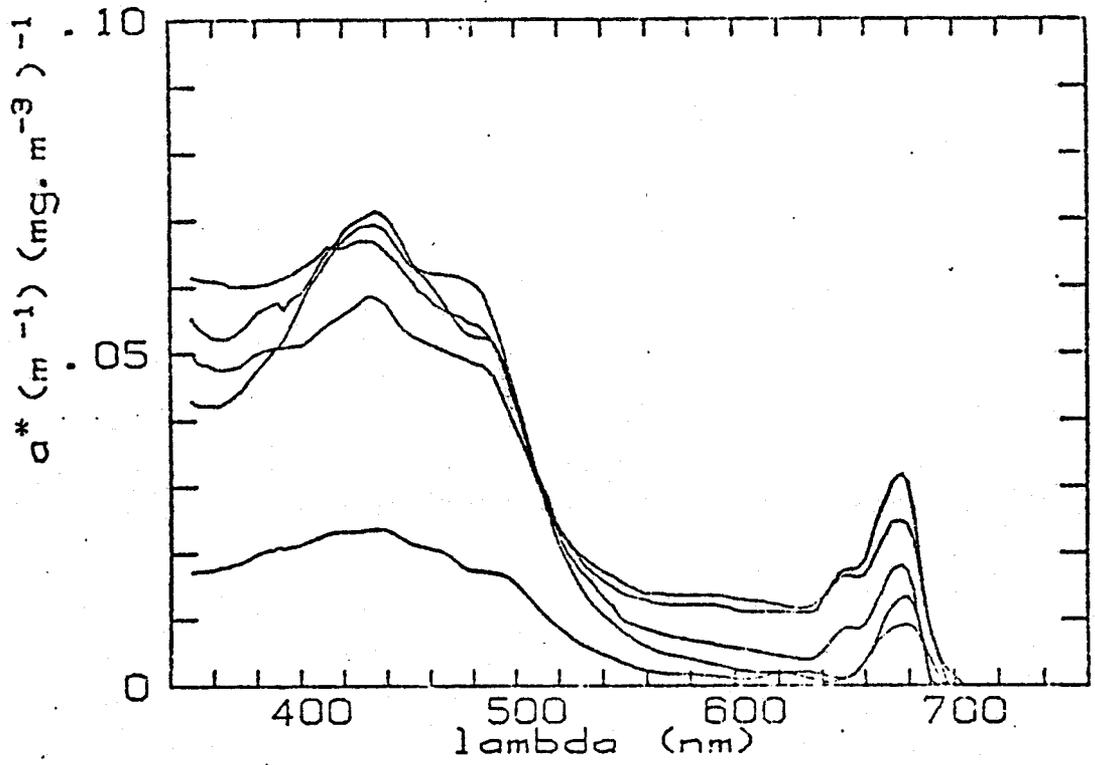


Fig. 3 - Valeurs spectrales des coefficients d'absorption par unité de concentration en chlorophylle a (exprimées en $m^{-1}(mg\ Chl.a.m^{-3})^{-1}$) pour les cinq espèces. (dans la thèse de A. BRICAUD, 1979).

ANNEXE II

PROPRIETES OPTIQUES DES EAUX DU DETROIT DU PAS-DE-CALAIS

Rapport Interne

(Expérience du 11 mai 1978)

-.-.-.-

I - INTRODUCTION

En mai 1978, une expérience de télédétection dans le Détroit du Pas-de-Calais a été réalisée conjointement, par le L.O.A., l'Institut de Biologie Marine de Wimereux et le Laboratoire de Géographie de l'E.N.S. (Montrouge). Les rôles de chacun étaient les suivants :

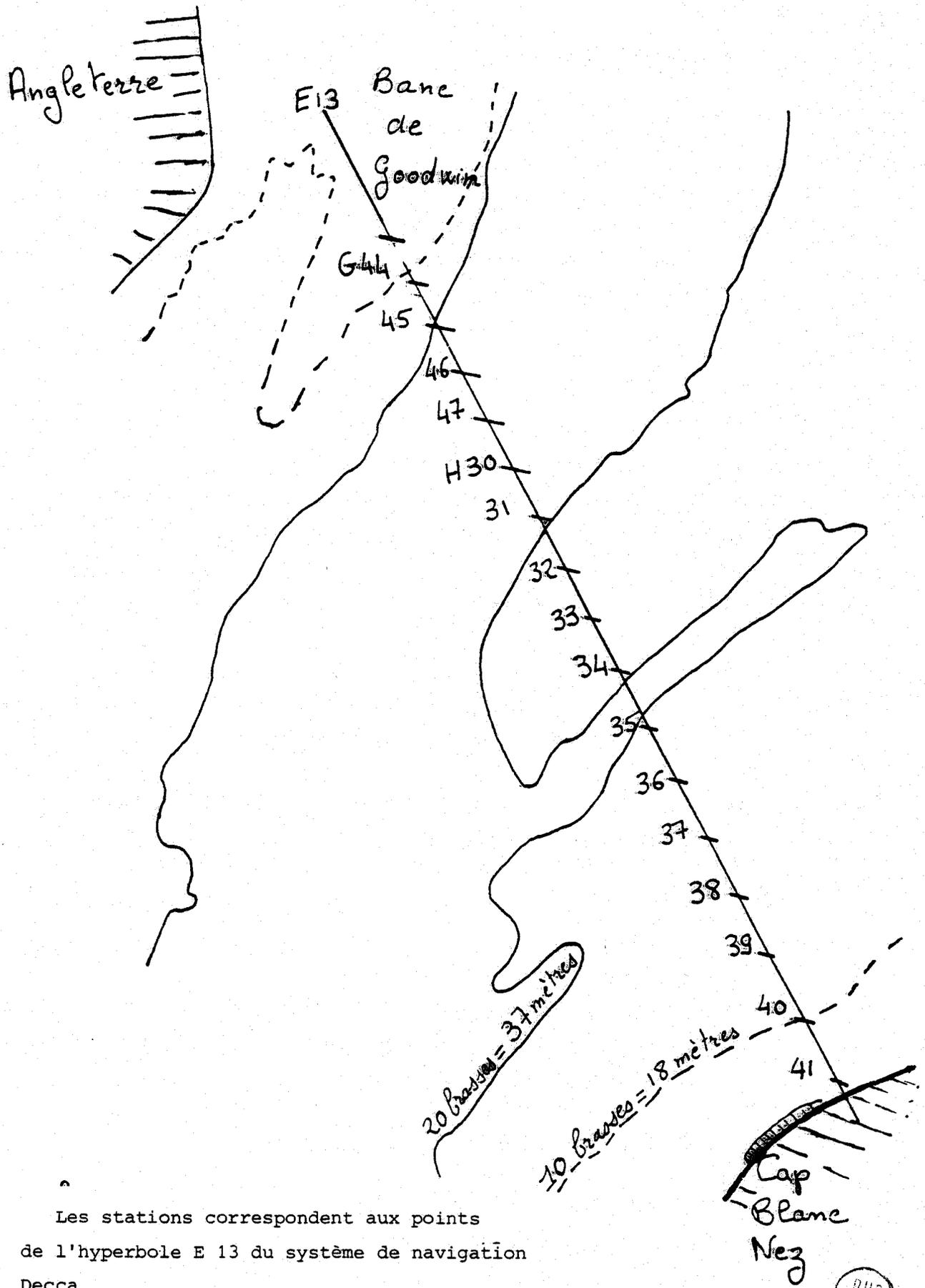
Avion : Mesures de réflectances - L.O.A.

Vérité Mer { Prélèvements pour chlorophylle - Wimereux
Microgranulométrie (Coulter), Diffusion optique - Montrouge.

Défavorisée par les conditions météorologiques (mer agitée) cette expérience a quand même fourni un certain nombre d'informations valables sur les propriétés optiques des eaux du Détroit du Pas-de-Calais.

II - DESCRIPTION DE LA RADIALE

La radiale étudiée, (Figure 1), correspond à la branche E 13 du système de navigation Decca. Elle est située entre Sangatte (France) et le banc de Goodwin (Angleterre). Le navire a fait des mesures, au cours de la matinée, dans le sens France-Angleterre. L'avion a survolé la radiale à quatre reprises avec un décalage de quelques heures.



Les stations correspondent aux points de l'hyperbole E 13 du système de navigation Decca.

Figure 1

III - TABLEAU DES MESURES

Quelques précisions sur le tableau de mesure (ci-après)

- Réflectance : mesure obtenue avec le même radiomètre qu'au Cap Lopez^(*) à l'altitude de 150 mètres. On donne la moyenne de 4 mesures (correspondant à 2 aller-et-retours). Ayant calculé les variances, nous pouvons considérer que la précision relative est de 15 %, due essentiellement aux erreurs de localisation et aux variations de réflexion de surface.

- Coefficient de diffusion à 550 nm

On donne le résultat du calcul de b_p par la théorie de Mie^(**) à l'aide des données de microgranulométrie (compteur Coulter). Le Laboratoire de Montrouge avait mis en oeuvre d'autres méthodes de mesures de turbidité :

- masse de particules sèches ;
- diffusion optique à 90°.

Mais il semble que la méthode "microgranulométrie" soit la plus sûre pour donner la valeur absolue du coefficient b_p .

- K_d : coefficient d'atténuation diffuse, obtenu en plongeant un flux mètre (400-700 nm) à différentes profondeurs.

- $(P_s)^{-1}$: inverse de la profondeur de disparition du disque de Secchi.

- Chlorophylle et Phéopigments

la précision des mesures de fluorimétrie est de l'ordre d'un facteur 2 ; on a porté la moyenne sur 2 prélèvements, les écarts entre les 2 mesures peuvent également atteindre un facteur 2.

(*) cf. références 8 et 9

(**) Y. F. THOMAS, communication personnelle (1978)

Station (repère Decca)	Reflectances				bp(550)	Kd _m ⁻¹	(P _{Secchi}) ⁻¹ m ⁻¹
	466	525	550	600			
H 41	4,57	6,99	7,76	8,39	3,53	0,84	0,71
40	3,78	5,23	5,61	4,93	2,20		0,44
39	3,84	5,09	5,22	4,07	1,37		
38	4,16	5,27	5,15	3,39	1,05		0,23
37	4,21	5,10	4,85	3,07	0,36		0,16
36	4,22	4,87	4,55	2,81	0,36		0,2 ou 0,
35	4,52	5,02	4,67	3,02	0,40	0,25	0,13
34	4,43	4,99	4,71	3,19	0,7		0,13
33	3,46	4,02	3,89	2,65	0,63		0,13
32	3,13	3,64	3,58	2,51	0,32		0,15
31	2,94	3,42	3,40	2,48	0,45		0,15
30	2,74	3,0	2,90	2,21	0,53		0,13
G 47	2,96	3,28	3,22	2,39	0,53	0,21	0,15
46	3,89	4,59	4,58	3,33	1,2		0,22
45	5,31	6,68	6,8	5,34	1,2		0,5



Station (repère Decca)	Sonde (m)	Fluorimétrie		Spectrophotométrie
		Chla (mg/m ³)	Pheop. (mg/m ³)	Chla (mg/m ³)
H 41	11	4,51	1,14	6,83
40	26	2,66	2,58	5,53
39	30	1,63	2,38	1,95
38	35	-		1,11
37	37	0,24	0,8	.62
36	40	0,14	0,34	.29
35	42	1,17	0,45	.85
34	35	1,22	0,34	1,34
33	34	1,78	1,10	-
32	42	2,37	1,51	-
31	48	2,71	1,95	-
30	49	3,35	1,15	-
G 47	54	2,66	0,68	-
46	54	2,24	1,36	-
45	31	1,77	1,60	-



IV - EXAMEN DES MESURES DE VERITE-MER

On note d'abord que l'on a une relation approchée entre les concentrations en phaeopigments et en chlorophylle a :

$$C_{chl\ a} = 2 C_{phaeop} \tag{1}$$

Cela justifie que l'on ne distinguera pas dans la discussion les concentrations en chlorophylle "a" de celles en phaeopigments. Tous les raisonnements seront rapportés à la concentration en chlorophylle a, notée simplement C.

On a ensuite recherché s'il existait une corrélation entre b_p et C.

En prenant pour valeurs de C, soit la seule mesure fluorimétrique, soit la moyenne des deux mesures si la mesure spectrophotométrique était disponible, on obtient le diagramme de la figure 2.

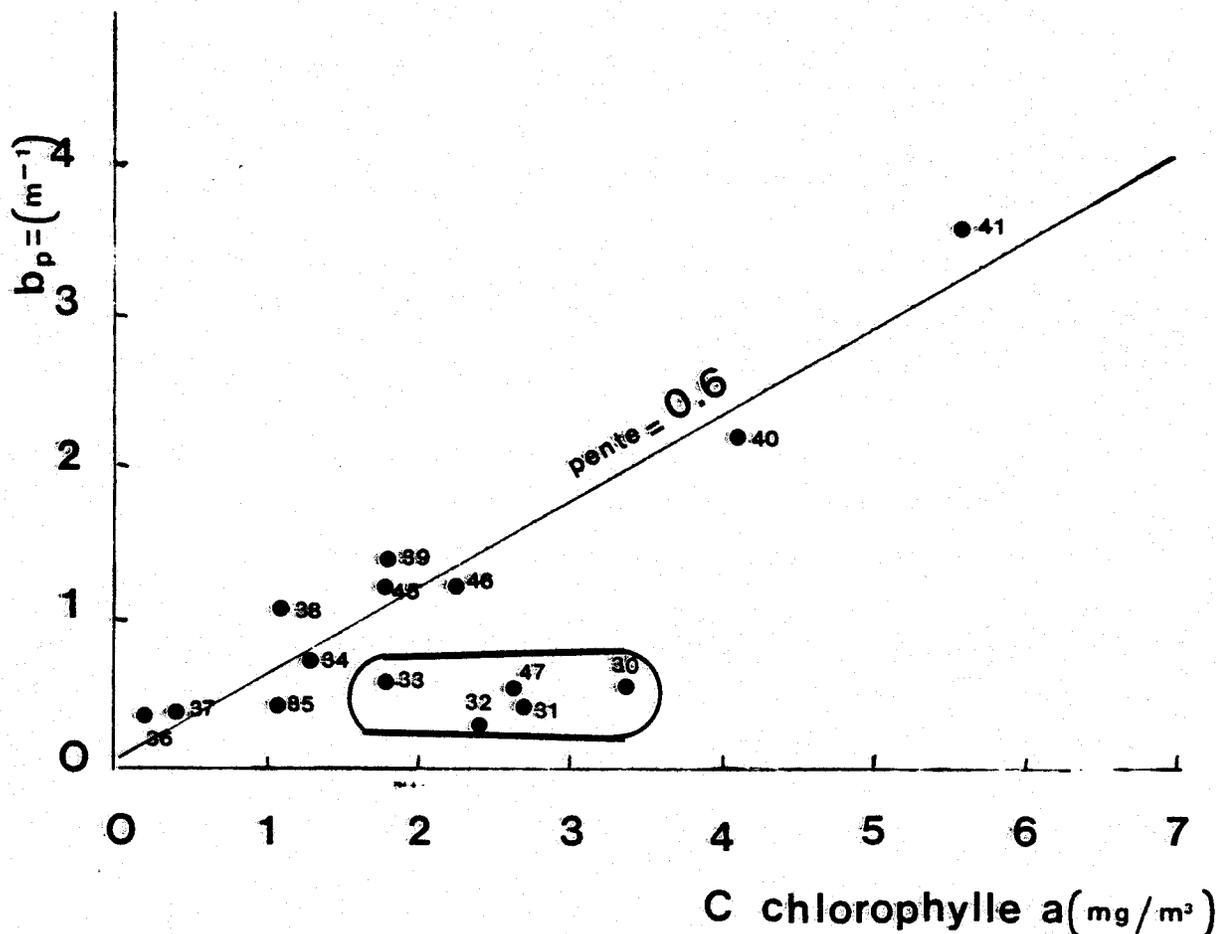


Figure 2

La majorité des points s'écartent peu de la droite

$$b_p = 0,6 C \quad (2)$$

Les 5 stations G47, H30 à 33, situées au centre du Détroit, se comportent différemment, montrant de fortes concentrations en chlorophylle, en présence d'un nombre peu élevé de particules.

On note cependant qu'on ne dispose, pour ces stations, que des mesures par fluorimétrie, et que la possibilité d'une erreur n'est pas à écarter :

- erreur de manipulation consécutif à l'état de la mer
- éventuelle fluorescence par les hydrocarbures.

L'hypothèse d'une erreur sur la détermination de la chlorophylle pour ces stations est corroboré par le fait 1) que les mesures au disque Secchi ne montrent aucune variation particulière 2) qu'un maximum relatif de chlorophylle au centre du Détroit est fortement improbable.

V - MESURES DE TELEDETECTION : APPLICATION DES ALGORITHMES

V-1 - Détermination indépendante de b_p et C

On a appliqué l'algorithme constitué par l'abaque à double entrée ($R_{466} - R_{525}$ et $R_{550} - R_{600}$) présentée dans l'article de Remote Sensing of Environment (VIOLLIER et al, 1977) (*).

La comparaison entre les b_p déterminés par télédétection et par mesure en mer est montrée sur la figure 3. On remarque que sur les 13 points calculés on obtient un accord à ± 40 % près pour 8 d'entre eux.

Pour la chlorophylle (graphique non présenté) l'accord est beaucoup moins bon, on ne retrouve qu'un ordre de grandeur, en l'occurrence une évaluation à un facteur 2,5 près.

(*) cf. référence 64

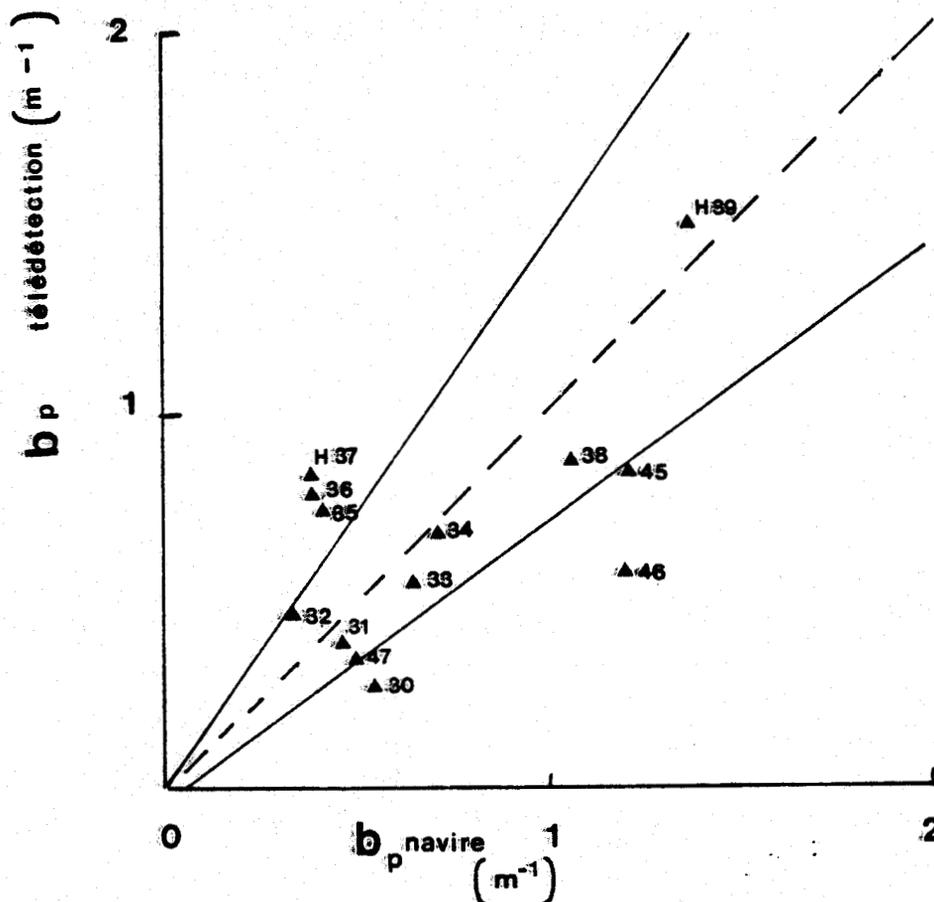


Figure 3

V-2 - Algorithme utilisant 2 longueurs d'onde

On a présenté dans l'article de Boundary Layer Meteorology (VIOLLIER et al, 1979)^(*) une relation directe entre la différence $R_{525} - R_{466}$ et C, en supposant implicitement une relation linéaire entre b_p et C. Cette relation est présentée sur la figure 4. Les mesures de $R_{466} - R_{525}$ (avion) fonction des vérité-mers C sont représentées par des points qui s'écartent relativement peu (1/4 d'intervalle logarithmique) de la relation théorique représentée en trait plein. Aux points obtenus lors de précédentes campagnes, on a ajouté de nouvelles données. On remarque que deux groupes de points s'écartent fortement de la loi théorique :

- le groupe H30, 31, 32 et H47 déjà remarqué précédemment figure 2
- le groupe H36, 37 correspondant à de très faibles valeurs de C.

(*) cf. référence 25



Les autres points sont en assez bon accord avec la loi théorique.

VI - MESURES DE TELEDETECTION : ANALYSE DES VALEURS DES REFLECTANCES

Les algorithmes d'extraction de C et de b_p utilisent des différences de réflectances, de façon à éliminer les perturbations de la réflexion du ciel ou des nuages sur la surface.

Mais dans la présente expérience, il est possible d'étudier les valeurs brutes des réflectances, dans la mesure où la perturbation de la réflexion de surface (atténué par l'emploi d'un polariseur) est restée constante, la couverture nuageuse étant restée totale, et probablement d'égale opacité.

Sur les figures 5a, b, c, d on a représenté les réflectances en fonction des b_p correspondant aux stations survolées.

Nous allons tenter d'interpréter ces variations à l'aide du modèle suivant :

la réflectance s'écrit en première approximation (*) comme

$$R_\lambda = R_{o\lambda} + 0,0023 \frac{b_{p\lambda}}{a_\lambda} \quad (3)$$

où $R_{o\lambda}$ est le terme de réflexion de surface, $b_{p\lambda}$ le coefficient de diffusion que nous supposons indépendant de λ

a_λ le coefficient d'absorption de l'eau, augmenté de l'absorption par les autres matières, que nous écrirons comme

$$a_\lambda = a_{\lambda o} + C a_{c\lambda} \quad (4)$$

Enfin dans les cas où b_p et C sont corrélés, on écrit :

$$b_p = r_a C a_{c(466)} \quad (5)$$

ou
$$b_p = r_c C \quad (6)$$

avec
$$r_c = r_a a_{c(466)}$$

(*) cf. référence 8

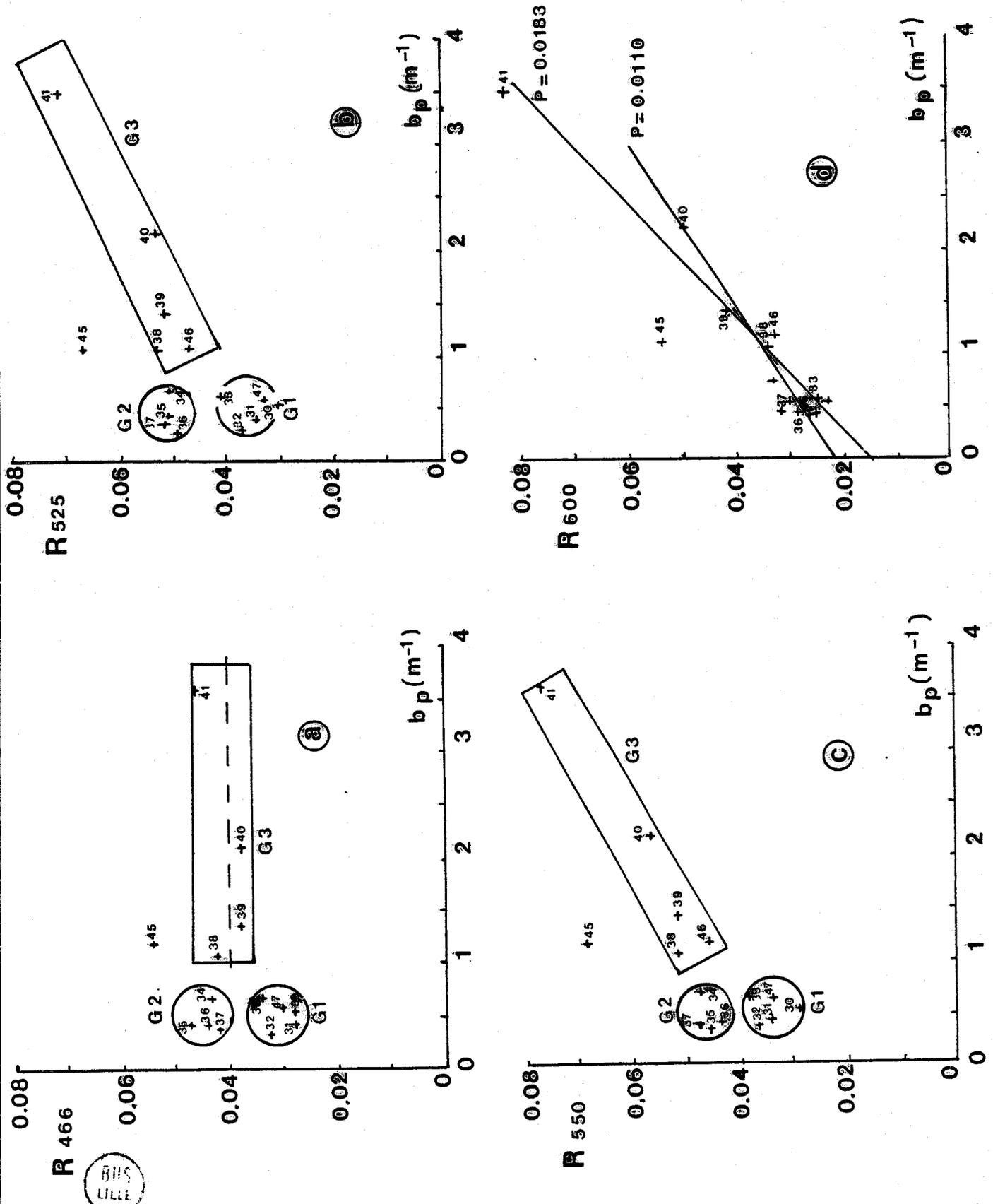


Figure 5

Réflectance à 600 nm

A 600 nm, $a_o > C \cdot a_{c\lambda}$, on a donc

$$R = R_o + 0,0023 \frac{b_p}{a_o} \quad (7)$$

La figure 5d, montre bien une relation linéaire. De l'ordonnée à l'origine, et de la pente de la droite, on tire

$$0,015 < R_o < 0,023$$

et $0,13 \text{ m}^{-1} < a_o < 0,23 \text{ m}^{-1}$

Ces dernières valeurs sont à comparer avec celles de CLARKE et JAMES ($0,185 \text{ m}^{-1}$) et de MOREL ($0,24 \text{ m}^{-1}$)

Réflectance à 466 nm

On a

$$R = R_o + 0,0023 \frac{b_p}{a_o + b_p/r_c} \quad (8)$$

Lorsque b_p augmente, a_o étant relativement petit, R tend rapidement vers :

$$R = R_o + 0,0023 r_c$$

Expérimentalement (figure 5a) R semble tendre vers 0,04, ce qui donne, compte tenu de la valeur 0,02 pour R_o :

$$r_a = 8,7$$

soit en prenant $a_c(466) = 0,065 \text{ m}^{-1}$ (YENTSCH)

$$r_c = 0,57$$

à comparer avec 0,6, trouvée à l'aide des mesures du navire.

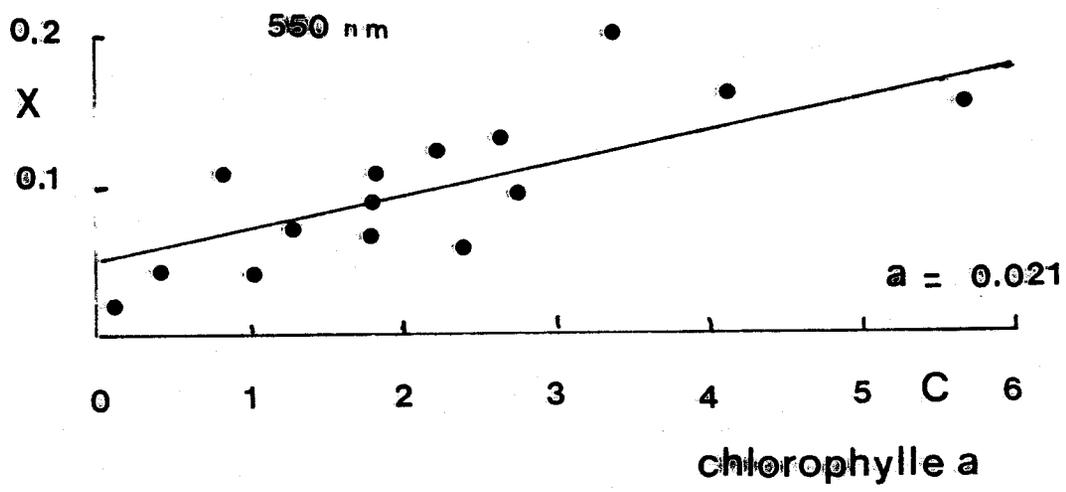
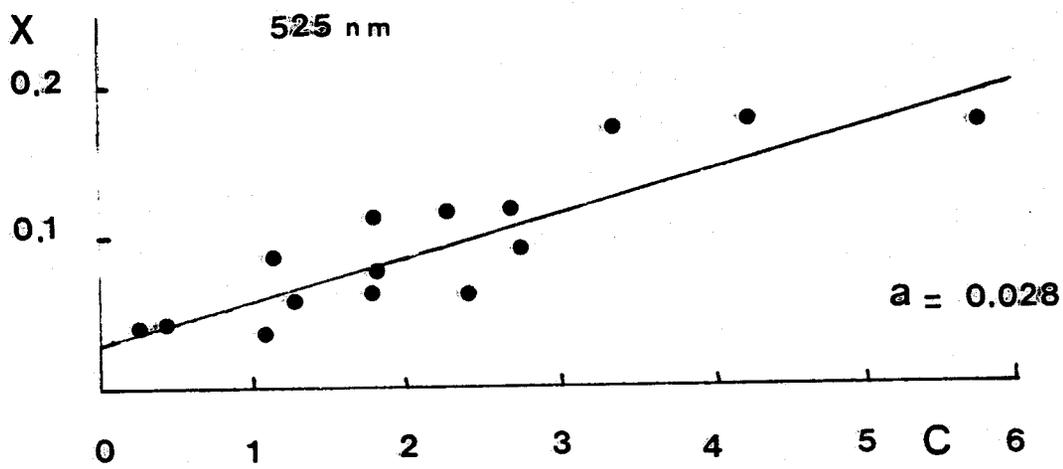
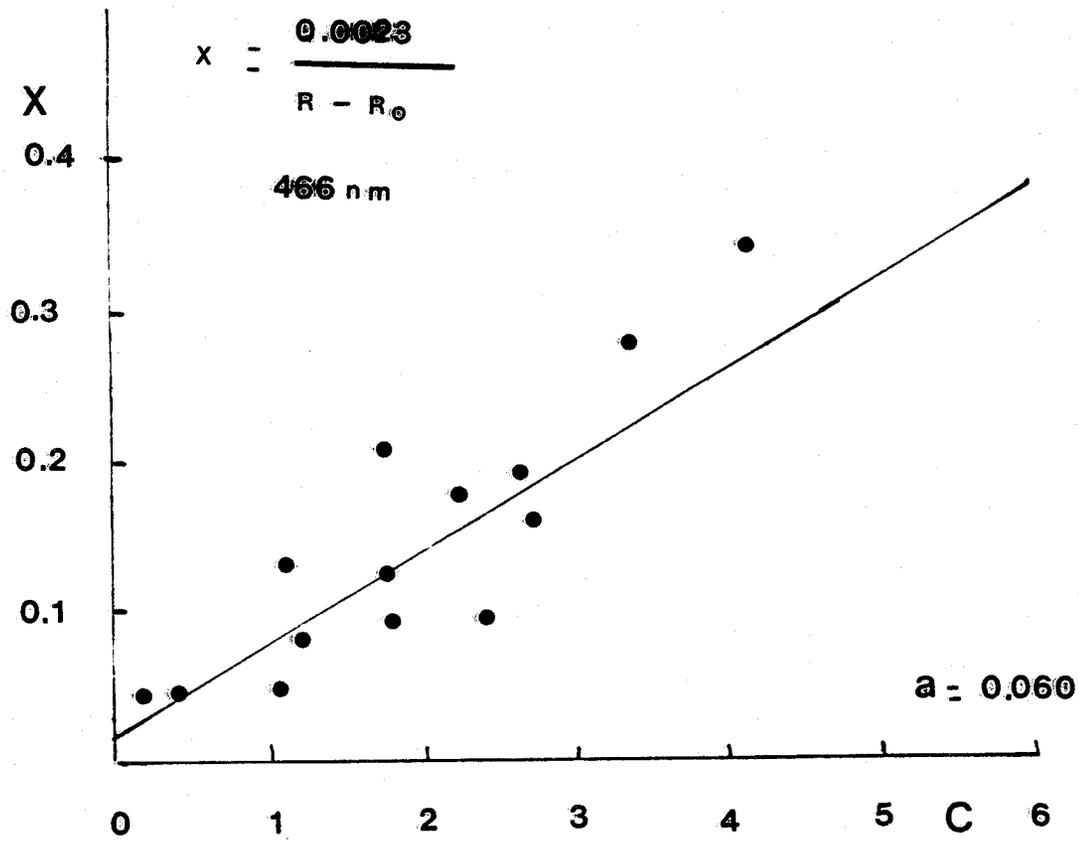


Figure 6

Absorption par la chlorophylle

On a tenté de retrouver les absorptions spécifiques de la chlorophylle à 466, 525 et 550 nm.

L'équation 3 peut en effet s'écrire

$$\frac{0,0023 b_p}{R - R_o} = a_o + C \cdot a_c \tag{9}$$

Le tracé de $X = \frac{0,0023 b_p}{R - R_o}$ en fonction de C donne donc normalement une droite dont la pente est égale à a_c . Malgré le caractère spéculatif de la détermination de ces pentes (voir figure 6), on obtient des valeurs assez réalistes :

λ	466	525	550
a_c	0,060	0,028	0,021

qu'il est intéressant de comparer aux valeurs de YENTSCH qui sont employées pour bâtir nos algorithmes :

a_c	0,065	0,01	0,006
-------	-------	------	-------

L'accord entre la valeur calculée à 466 nm, et celle de YENTSCH explique pourquoi les algorithmes bâtis sur ces données donnent d'assez bon résultats. Mais il est clair que la valeur retrouvée est surestimée puisque nous n'avons pas tenu compte des autres pigments et matière. Dans l'algorithme, la surestimation de a_c est compensée par la non-prise en compte d'absorptions supplémentaires, probablement corrélées, il est vrai, à b_p et à C.

CONCLUSION

Malgré les très mauvaises conditions matérielles dans lesquelles se sont déroulées les mesures, nous avons quand même obtenu un certain nombre de résultats réalistes. L'originalité de ces résultats provient essentiellement des mesures de microgranulométrie Coulter qui nous ont permis d'évaluer le coefficient de diffusion par les particules b_p .

Parmi les points importants :

1) - dans la mesure où on ne considère pas les points 30 à 33 et 47, affectés probablement d'erreurs instrumentales, on retrouve le gradient côte large bien connu ;

2) - le long de ce gradient, turbidité et chlorophylle sont corrélés suivant :

$$b_p \approx 0,6 C$$

3) - les nouveaux points obtenus confirment généralement la relation entre mesure de chlorophylle in situ et différence de réflectances dans le vert et le bleu ;

4) - l'analyse simultanée des valeurs de réflectances et du coefficient b_p donne une idée des valeurs d'absorption spectrale des substances présentés dans la mer.

CONCLUSION

APRIL 23-27, 1979

"ERIM - Ann Arbor - Michigan"

ENHANCEMENT OF LANDSAT IMAGERY FOR THE MONITORING OF
COASTAL WATERS. APPLICATION TO THE SOUTHERN PART OF THE NORTH SEA

M. Viollier, N. Baussart

Université des Sciences et Techniques de Lille
Laboratoire d'Optique Atmosphérique (ERA 466)
B.P. 36 - 59650 Villeneuve d'Ascq (France)

ABSTRACT

In order to monitor the quality of coastal waters, Landsat products have been improved by specific data processing.

These treatments are as follows

- 1) - improvement of the signal to noise ratio to $NE\Delta\rho = 0.001$, by using the mean value taken for 6×6 pixel areas (ground resolution ≈ 500 m)
- 2) - atmospheric correction which takes into account for Rayleigh scattering
- 3) - differences between the reflectances in MSS 5 and 6 bands.

These treatments have been applied to a Landsat picture showing the Southern part of the North Sea. Detailed features of turbid plumes in the Straits of Dover and near the Thames Estuary are detected by these treatments.

1. INTRODUCTION

The Landsat multispectral scanner (MSS) was not designed for oceanographic applications. The lack of a channel in the blue region of the spectrum, the weakness of the spectral resolution ($\Delta\lambda=100$ nm) and of the signal - to - noise ratio represent strong limitations to this kind of research. However interesting observations have been obtained over strong gradient areas. Such is the case at the edges of the Gulf Stream, described from Landsat by MAUL et GORDON (1975). It is also the case for all the coastal regions, the French littoral for example (THOMAS, 1978). From the studies above, it can be noted that important features can be detected from Landsat when an enhancement of the digital data is applied, but also that such treatments are not sufficiently developed.

The steps in the treatment that we suggest in this paper are as follows

- 1) improvement of the signal to noise ratio by using averages taken for 6×6 pixel areas,
- 2) atmospheric correction which takes into account for Rayleigh scattering,
- 3) differences between the reflectances in MSS 5 and 6 bands.

The proposed treatment has been applied to two Landsat images showing the Southern part of the North Sea. Turbid plumes in the Dover Straits and near the Thames Estuary are detected in this way. The direction and the pattern of the plumes are different in the two pictures and seem to depend on the tide.

2. DESCRIPTION OF THE STUDIED AREA

The interest of our treatments will be demonstrated by their application to the Southern Part of the North Sea. In this section, we describe the general background of this area.

Figure 1 shows the location map. The concerned area is inside the dashed rectangle, about 80 km \times 120 km, i.e the quarter of a Landsat standard image.

The first feature of the location is that it is shelf sea. Greater depths (50 meters) are observed in the middle of the Dover Straits (approximately point G). Very shallow waters (less than 20 meters) are observed in the Thames Estuary, as are the Flemish littoral (areas

D and E) and the banks of Goodwin (area C). These are areas where coastal discharges are accumulated from the Scheldt, Meuse and Rhine and from the Thames River. In these locations the water is so shallow that the sea floor can be exposed at several kilometers from the coast during the larger tides.

An other important feature of the location is that the semidiurnal lunar tide generates strong alternative streams. The greater stream speeds are observed in approximately the middle of the Straits (point G) alternatively towards the South-West (ebb tide) and the North-East (flood tide). Figure 5 shows the opposite directions of flow of the ebb and the flood. Depending on the tide coefficient, a water mass can cover a distance of between 13 and 20 km with each changing of the tide.

The residual circulation flows northwards. Thus, the Southern oceanic-like waters enter the coastal discharge water of lower salinity. The mixture of both kinds of water, comprising complementary nutritive salts, make this area extremely productive biologically. In accordance with a seasonal rhythm, primary production (chlorophyll) is maximum in Spring, and a lower maximum is also observed in Fall.

The whole area is very turbid if compared to waters of open ocean. Secchi depths are of a few meters near the coast. Clearer waters (Secchi depth equal to 10 meters) are usually observed in the Middle of the Straits. Because of the perpetual mixing, sediments of the sea floor are constantly resuspended, and turbidity and bottom depth are strongly correlated (THOMAS, 1979). As a matter of fact, a decrease in turbidity can be observed from the coast. This gradient has already been recorded during an ocean color remote sensing experiment (VIOLLIER et al, 1978).

The last important characteristic is that this region is in the center of North West Europe, and thus is of great economic importance. A high population density is found on the two coasts, as are several large industrial regions (London, Rotterdam, Antwerp, Dunkerque,...). In the Dover Straits the maritime traffic is very heavy (400 boats per day). Air traffic is very intense as well. Landsat images can reveal the extent of these human activities. Ships longer than 100 meters can be detected (Mc DONNEL and LEWIS, 1978) and so can jet contrails and zones of atmospheric pollution. All of these unnatural phenomena perturb sea color measurements, and must be accounted for in image treatment.

3. CHARACTERISTICS OF THE TWO LANDSAT SCENES

Only a few Landsat scenes are available for this area, because it is often covered by clouds. We have studied the two scenes of best quality 1975 June 12 (Landsat 1) and 1977 March 30 (Landsat 2). Both were received by the European reception station of Telespazio in Fucino (Italy). Digital data from the CCT are computer processed in our University, and the image can be displayed on a color TV (Pericolor SEIN system). Figure 2 shows black and white reproduction of MSS 5 and 7 displays.

The June 1975 image is entirely cloud free, as is all but the northern part of the March 77 image. In the middle part of this image, one can see two irregular horizontal traces about five kilometers wide, which we assume to be a cloud generated by jet contrails. Much narrower (and unexplained) traces are formed on the MSS 7 image of June 1975.

The wind and visibility range parameters have been obtained from meteorological archives. They are as follows

	12 June 75	30 March 77
Wind speed	10 to 15 knt	10 knt
Direction	from N NE	from E
Visibility range	10 km	20 km

Water is perfectly absorbing in the MSS 7 channels (800-1100 nm) which explains that reflectances measured by MSS 7 channels are commonly used to detect sun glitter and sea foam, which are index of the sea surface state. A good example is given here by the MSS 7 image of June 75. Low reflectance areas found in the Dungeness Bay (area F) and in the Thames Estuary (A), both sheltered against northerly winds. Higher reflectances are found near the banks (C) and in open sea location (B). Such deductions cannot be made for the March 1977 image, for which the wind was less strong and the sun was lower (bad conditions for glitter).

It is very interesting to notice that the two scenes (taken at 10h TU) pertain to two opposite tide situations.

	Time / HW in Dover	Coefficient	Water height (Dover)
12 June 75	HW - 3 (ebb)	88	4 m
30 March 77	HW + 3 (flood)	42	5 m

(HW-3 means 3 hours before high water in Dover)

This makes comparison of the two pictures extremely useful for hydrological studies.

4. DATA PROCESSING

4.1 Computation of Reflectances

The Data for European observations are transmitted to the ground based receiving site of Telespazio at Fucino, Italy. The MSS data are quantized on board over 64 steps, but the CCTs produced at Telespazio contain data distributed over a broader scale which extends from 0 to 255. Telespazio (ANONYMOUS, 1976) uses a statistical calibration processing in view of reducing the striping effect and of expanding the dynamic range to its maximum. This processing, applied to most CCTs is luckless for oceanographic applications because it changes the values of the radiometric offsets and of the linear gain, and it becomes difficult to retrieve the original calibration.

With the aid of the Radiometric Look Up Table Record, provided for each CCT, we have tried to retrieve the original data over 64 steps. The digital counts N are then converted into radiances by assigning 63 to the top level I_{max} and zero to the value of the offset I_0 :

$$I = \frac{N}{63} I_{max} + I_0 \tag{1}$$

Finally, the radiances are converted into space reflectances, defined as

$$R = \frac{\pi I}{E_0 \cos \theta_0} \tag{2}$$

where $(E_0 \cos \theta_0)$ is the incident irradiance through a horizontal surface at the top of the atmosphere. OTTERMAN and FRASER (1976) have used this procedure. The values of E_0 , I_0 and I_{max} were given for each channel of Landsat 1 and 2 in Table 1 of their article. In our computation we have used the same values.

4.2 Average over 6 x 6 pixels

Ocean reflectance measurements (example, VIOLLIER et al 1978) show that the $NE\Delta$ (noise equivalent in reflectance) must be less than 10^{-3} in order to be useful, and this is much lower than the $NE\Delta$ of MSS. To the contrary the spatial resolution of Landsat is largely sufficient for most oceanographic applications. Thus, it is of great interest to reduce the spatial resolution by averaging the reflectances of N pixels so as to reduce the noise by a factor \sqrt{N} .

Since six scanlines of a scene are observed simultaneously by six detectors, the averaging of six consecutive lines is preferable. In our application, averages have been taken for areas of 6 x 6 pixels, i.e the new picture element is of about 500 x 500 m.

The following example demonstrates the interest of this operation. Figure 3a shows a scan line plot (MSS 4) across the points A and B of the June 75 image. It appears that the reflectance resolution is $\Delta\rho = 0.01$ and S to N ratio = 4. Fig. 2b shows the reflectances over the same scanline after averaging 6 x 6 pixels. Little variations can be noticed much more easily. The $NE\Delta\rho$ attains 0.001 and the (S to N) ratio about 20. In order to save the profit from this procedure, all further computations and image display operations must be made with real numbers rather than with the round numbers found between 0 and 255 (if words of 8 bytes).

During this step of the procedure, all the questionable pixels (emerged sands, clouds, ships,...) are selected to form a special class. This choice is automatically made by examining the reflectance in channel 7 (800-1100 nm). If only one of the 36 pixels has a reflectance higher than the common values observed over the sea, the whole 36 pixel block is rejected. Such blocks will appear in white on Figure 6.

4.3 Atmospheric Correction of Rayleigh Scattering

Atmospheric corrections of ocean images have recently been studied by GORDON (1978) and VIOLLIER et al (1979). It was shown that it is possible to separate the effects of the Rayleigh and aerosol scatterings. The reflectance R at wavelength λ (λ is not written to simplify notations) can be written in the following way

$$R = T_{o3} \{ \rho T + \rho_g T' + R^M + R^A \} \quad (3)$$

where ρ is the diffuse reflectance of the ocean including the reflectance from white caps.
 ρ_g is the directional reflectance of the sun glint in the field of view of the sensor.
 T_{o3}^g is the ozone transmittance.
 T the diffuse transmission.
 T' the transmittance for the scattering.
 R^M and R^A are the reflectances of the air, respectively due to molecules and aerosols, and including the interaction with the surface reflexion.
 All these terms depend on the observation and incidence directions, (θ, ϕ) and (θ_o, ϕ_o) .

A distinction exists between the diffuse transmission T and the transmittance T'. Transmittance deals only with the direct transmission of the original flux from the sun

$$T' = \exp(-(\tau^M + \tau^A) (\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta_o})) \quad (4)$$

where τ^M and τ^A are the molecule and aerosol optical thicknesses.

Diffuse transmission involves both the direct flux and a portion of the forward-scattered flux. When the reflectance is lambertian and constant over several kilometers, a good approximation of the diffuse transmission is

$$T = \frac{1}{4} (1 + \exp(-\tau^M/\cos\theta)) (1 + \exp(-\tau^M/\cos\theta_o)) \quad (5)$$

Effects of aerosols in the value of T are of little importance for small optical thicknesses and are neglected in this paper. This formula is no longer valid for the areas close to the coast, where the neighbouring land is partly measured by the satellite. This effect is currently being studied (TANRE et al, 1979) but the correction would be relatively small in the case of Landsat, and will not be applied in this paper.

A simple and accurate formula (VIOLLIER et al, 1979) of R^M is given by the approximate expression for single scattering

$$R^M = (1 + \rho'(\theta) + \rho'(\theta_o)) \frac{p(x)}{4 \cos\theta \cos\theta_o} \tau^M \quad (6)$$

where $p(x)$ is the phase function for Rayleigh scattering

$$p(x) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 x) \quad (7)$$

and x the scattering angle

$$x = \pi - \arccos (\cos\theta \cos\theta_0 - \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\phi - \phi_0)) \quad (8)$$

R^M includes 1) radiation scattered by the atmosphere 2) radiation reflected after scattering and radiation scattered after reflection, with surface reflection coefficient $\rho(\theta)$ and $\rho(\theta_0)$. Equation 3 yields the value of the backscattering reflectance

$$\rho = \frac{1}{T} \left\{ \frac{R}{T_{03}} - R^M \right\} - A \quad (9)$$

where A accounts for the perturbing effects of glitter and of aerosol scattering.

$$A = \frac{\rho_g T'}{T} + \frac{R^A}{T} \quad (10)$$

Numerical values of θ_0 , τ^M , R^M , T^M and T_{03} are shown on the tables 1 and 2. Term A can not be computed because τ_A and aerosol phase function are unknown.

4.4 Differences of reflectances

It can be demonstrated that term A of equation 10 vary slowly as a function of wavelength. Thus, by computing differences between reflectances ρ at two channels, most of the perturbing effects included in term A are eliminated.

Two differences have been studied

$$D_4 = \rho_{MSS4} - \rho_{MSS6}$$

and
$$D_5 = \rho_{MSS5} - \rho_{MSS6}$$

which are usually positive and increase with water turbidity (scattering coefficient). Interpretation of D_4 is slightly more difficult, however, because D_4 also depends on bottom reflectances through shallow waters and on the absorbing properties of water.

Figures 3c and d show the differences D_4 and D_5 on the same scanline of June 75 image.

It can be noticed that, unlike R_{4m} (figure 3b) D_4 and D_5 do not increase at the end of the scan. On the plot of R_{4m} , turbid waters of the Thames Estuary (A) have the same values as the clear water of region B^m, where sun glitter or white caps contribute to increase reflectance. The ambiguity between glitter and turbidity was in this case eliminated by the computation of differences.

Examining Figure 3d, one can observe that D_5 is slightly negative, which is not realistic. This anomaly is much more obvious on the March 77 picture, where the mean level of D_5 , after atmospheric correction is of - 0.02. We conclude that our attempted retrieval of original calibrations were unsuccessful. One of the conclusions of this paper will be that it is not possible to give a quantitative interpretation when the data have been considerably modified during CCT production.

Given this problem, we have changed the offset level of the March 77 image so that D_4 and D_5 values would be equal for both pictures at a reference point. We have chosen the reference pixel inside the Dunkerque harbor, where surface effects are at a minimum. This method is not entirely satisfactory, but it allows comparison of D_4 and D_5 values on the two images.

Figure 4 shows the plot of D_4 versus D_5 along the same scanline of figure 3. Lower plots pertain to the clear waters of region B and higher plots to the turbid waters of region A. D_4 and D_5 are well correlated. Slight deviations are probably due to the influence of bottom on D_4 . Further analysis has been prevented, however, by a lack of well calibrated data. We have used only D_5 as a relative index of turbidity.

5. COMPARISON OF THE TWO PICTURES AFTER PROCESSING

The mapping of D_5 is compared for two pictures (figure 6). Caution should be taken for the Thames Estuary on the March 77 pictures because of the neighbouring clouds. Most of the interesting comparisons are made in the Dover Straits. The direction and the extent of the turbid plume seems to depend on the tidal conditions.

On the ~~12~~ June 75 picture, the stream had been flowing towards the South-West for 5 hours before the area was observed by Landsat. A mass of turbid water in region F (Dungeness Bay) seems to be moving southward parallel to the coastline, from the Goodwin Bank (C). Along the French littoral, turbidity areas seem to adhere to the coastline.

At the time of the 30 March 77 Landsat picture, the tide is reversed. The stream had been flowing towards the North-East for 4 hours. One of the changes in the image is seen near the French littoral (region H), where turbid waters stand away from the coast and form a 6 km long plume jutting out into the channel. This phenomenon can be explained by tidal eddies due to the shape of the coastline, particularly by the presence of a headland (Cape Gris Nez). A second change is relative to the English littoral (region F) where the turbid area is much more extensive than in June 75, and seems more homogeneous. It can be suggested that this results from variation in meteorological and seasonal conditions. The differences in water height (in particular in the northern part) can play also an important role. Other features are different as well, such as a 20 km long plume to the North of the Goodwin Area (C).

6. CONCLUSION

We have developed a specific data processing for the oceanographic application of Landsat. This processing allows one to obtain reflectance differences between channels 4, 5 and 6 independent of the sun elevation and largely independent of the atmospheric conditions. Quantitative interpretation in terms of marine optics then becomes feasible.

In the examples presented here, it was not possible to successfully apply this processing because of the uncertainty in the calibration of the data. First, the radiometric accuracy of Landsat 1 and 2 probably is about 10 %. Second, the statistical calibration procedure used by Telespazio for the enhancement of continental scene, greatly increases this uncertainty. It is pointed out that the inaccuracy of the calibration of visible sensors is often the main problem in most oceanographic applications.

This problem has limited the quantitative interpretation of two pictures showing the Straits of Dover. Qualitative results have been obtained, however, and demonstrate the interest of Landsat Imagery for the study of coastal environment. Turbid plumes, easily detected from Landsat, can show tidal circulation near the coast, which can play an important role in the transport of sewage and radioactive wastes.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

This research was supported by the "Centre National de la Recherche Scientifique" (C.N.R.S.) and by the "Centre National d'Etudes Spatiales" (C.N.E.S.).

Thanks to Dr. P.Y. DESCHAMPS for his helpful advices and to L.F. MARTIN for his aid in the translation.

We are also grateful for the helpful assistance given by L. GONZALES and C. DEROO in preparing the computer operations.

8. REFERENCES

- ANONYMOUS : 1977, "Format Specifications for Landsat MSS System Corrected Computer Compatible Tape", Telespazio DPS-SES-NT/0230.02/200576.
- GORDON H.R. : 1978 "Removal of atmospheric effects from satellite imagery of the oceans", Appl. Opt., 17, 1631-1636.
- MAUL G.A., GORDON H.R. : 1975 "On the use of the Earth Resources Technology Satellite (Landsat 1) in Optical Oceanography", Remote Sensing of Environment, 4, 95-128.
- Mc DONNEL M.J., LEWIS A.J. : 1978, "Ship Detection from Landsat Imagery", Photogram. Eng. and Remote Sens., 44, 297-301.
- OTTERMAN J., FRASER R.S. : 1976 "Earth-Atmosphere System and Surface Reflectivities in Arid Regions from Landsat MSS Data", Remote Sens. of Env. 5, 247-266.
- TANRE D., HERMAN M., DESCHAMPS P.Y., DE LEFFE A. : 1979 "Atmospheric modeling for space measurements of ground reflectances including bidirectional properties" submitted to Applied Optics.
- THOMAS Y.F. : 1978 "Utilisation des données Landsat pour la mise en évidence de la turbidité en zones littorales ; Limites des méthodes" Publ. Sci. Tech. C.N.E.X.O. : Actes Colloq., 5, 109-121.
- THOMAS Y.F. : 1979, personal communication.
- VIOLLIER M., LECOMTE P., BOUGARD M., RICHARD A. : 1978 "Expérience aéroportée de télédétection (température et couleur de la mer) dans le Détroit du Pas de Calais", Oceanologica Acta, 1, 265-269.
- VIOLLIER M., TANRE D., DESCHAMPS P.Y. : 1979 "An algorithm for remote sensing of water color from space", Submitted to Boundary Layer Meteorology.

Table 1 - Rayleigh optical thicknesses

Channel (MSS) -	Center wavelength (nm)	τ^M
4	550	0.0948
5	650	0.0481
6	750	0.0269

Table 2 - Atmospheric correction

	12 JUNE 1975			30 MARCH 1977		
θ_o (degree)	37.34			54.11		
Channel	4	5	6	4	5	6
R^M	0.0380	0.0192	0.0108	0.0425	0.0215	0.0121
T^M	0.901	0.948	0.970	0.883	0.938	0.964
T_{O3}	0.928	0.951	1	0.913	0.941	1

θ_o : Solar zenith angle

R^M : Reflectance of the Rayleigh layer

T^M : Diffuse transmission of the Rayleigh layer

T_{O3} : Ozone transmittance (a seasonal mean value of the abundance of O3 has been used).

The sighting is vertical ($\theta=0$).



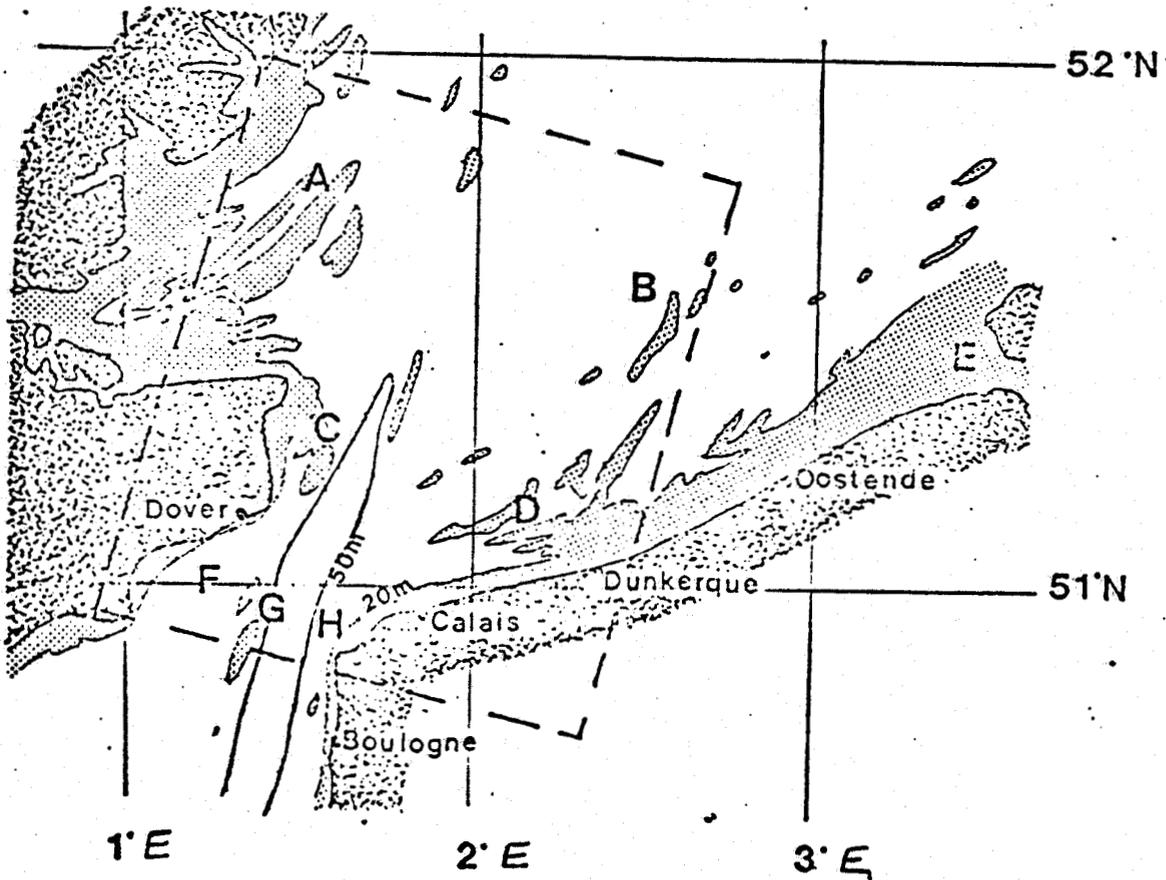


Figure 1 - Location Map. The area inside the dashed rectangle is the region studied.

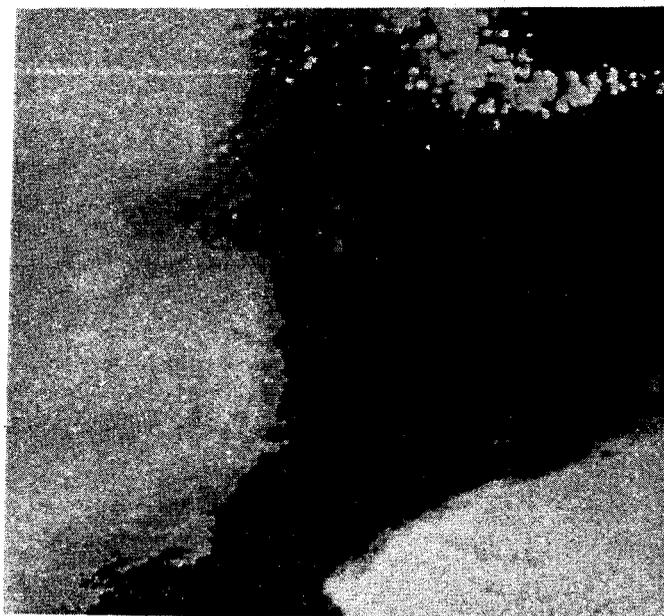
One can distinguish several areas

- A - Shallow and turbid waters of the Thames Estuary
- B - Clear water, farther from the coasts
- C - Banks of Goodwin
- D - Shallow waters of the Flemish littoral
- E - Outflows of the Scheldt, Meuse and Rhine Rivers
- F - Dungeness Bay
- G - Dover Straits
- H - Cape Gris Nez area



12 JUNE 1975

30 MARCH 1977



MSS 5 (600-700 nm)



MSS 7 (800-1100 nm)

Figure 2 - The two Landsat Images of the Southern part of the North Sea.

(Reflectance increase from black to white)

The lower photos (MSS 7) show surface and atmospheric features.

The higher photos (MSS 5) mix the preceding effects and the effects of water turbidity.

(G.D.T.A. products).

RUS
LILLE

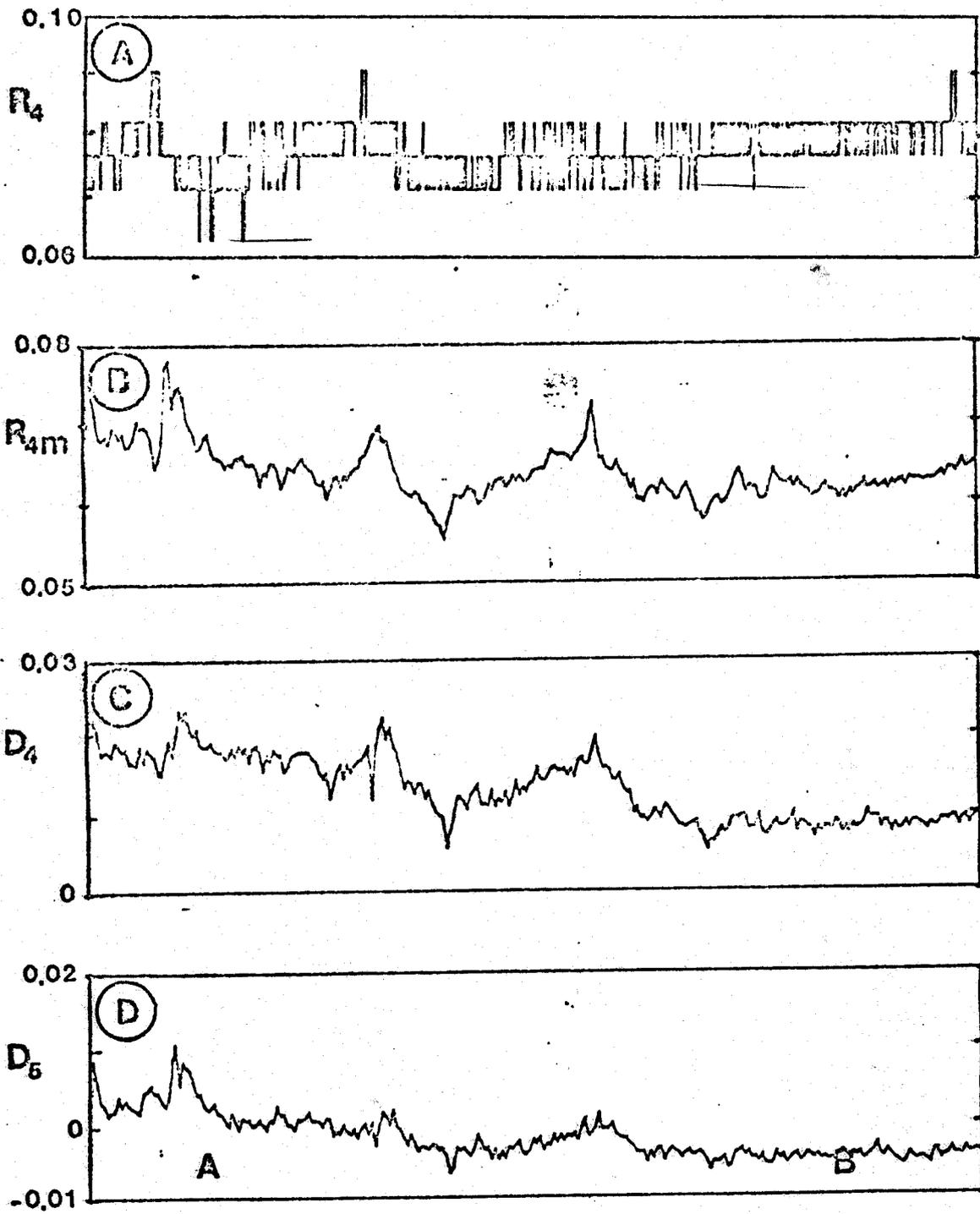


Figure 3 - Plot of a scanline between points A and B of Figure 1 ; 12 June 75.

- a) MSS 4 original data
- b) averages taken for 6 x 6 pixel areas
- c - d) - difference D_4 and D_5 (MSS 4-MSS 6, MSS 5-MSS 6) after atmospheric correction.

BUS
LILLE

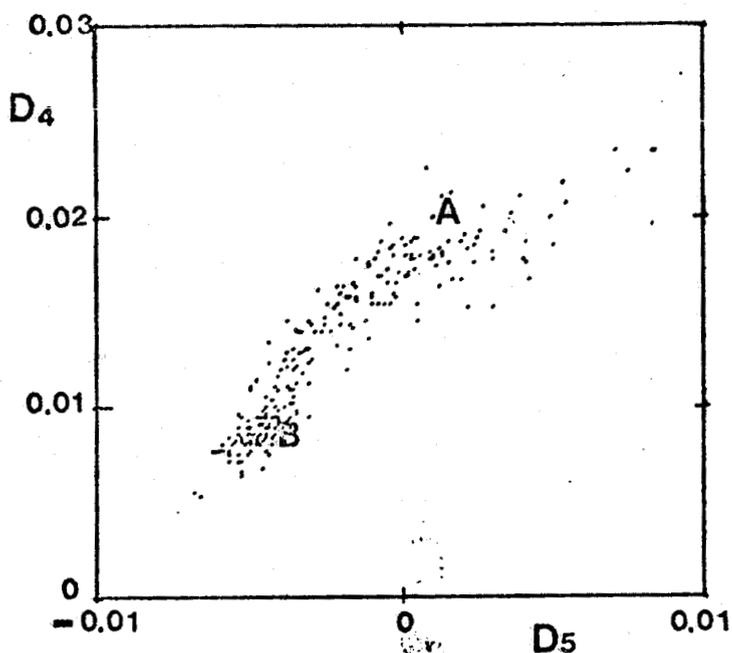


Figure 4 - Plot of $D4 = \rho \text{ MSS } 4 - \rho \text{ MSS } 6$ versus $D5 = \rho \text{ MSS } 5 - \rho \text{ MSS } 6$ for the same scan line as in Figure 3.

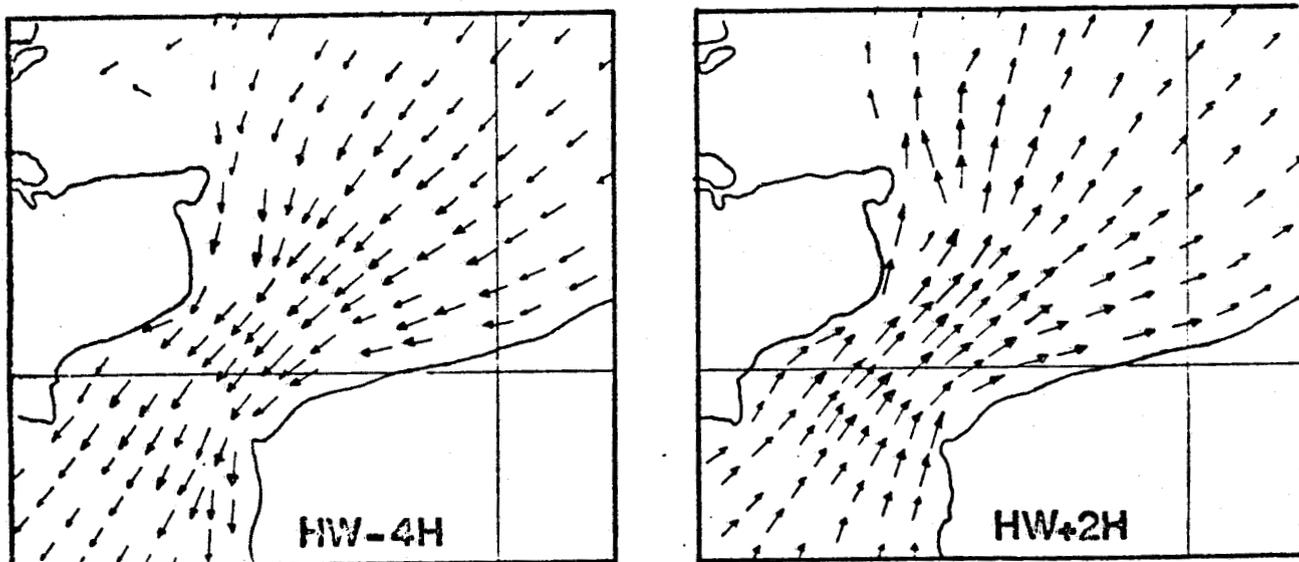


Figure 5 - The ebb and flow (from Editions Cartographiques Maritimes, Paris) (HW-4H means 4 hours before high water in Dover). Tidal streams flow to the South-West between HW-7H to HW-3H, and after the reverse, to the North-East between HW-1H to HW+3H. The stream speed can attain 3knt .



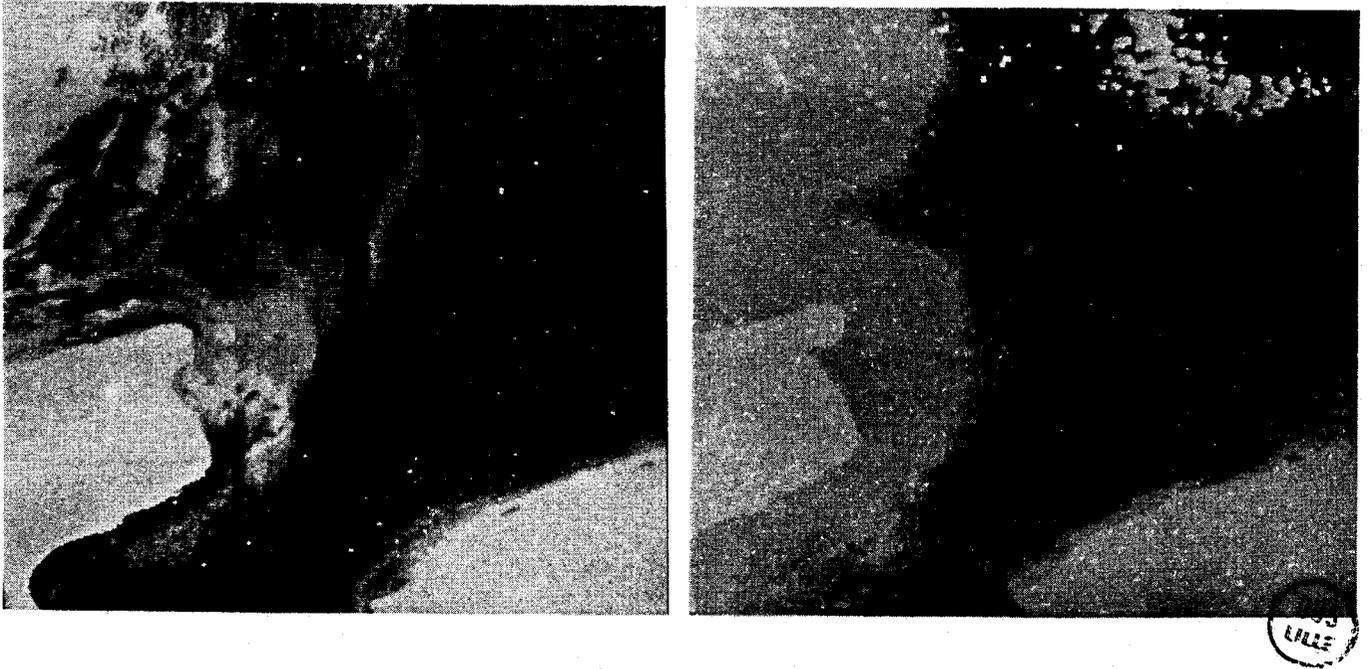


Figure 6 - Images showing the difference $D5 = \rho_{MSS 5} - \rho_{MSS 6}$ in June 75 (left) and March 77 (right). $D5$, index of water turbidity, increases from black to clear.

In white : continent, clouds and ships, recognized with the aid of MSS 7.

ANNEXE IV

MISE EN EVIDENCE DE L'INFLUENCE DU FOND SUR LA MESURE DE LA COULEUR DE L'OCEAN
A PROXIMITE DU BANC SABLEUX DE GOODWIN, DETROIT DU PAS DE CALAIS

Cette annexe résume le travail présenté lors du congrès 1979 de la Société Française de Physique (S.F.P.) à Toulouse.

Nous montrons une application de notre modèle (équ. I-37) pour l'interprétation d'une image prise au-dessus du détroit du Pas-de-Calais par le satellite LANDSAT 1 le 12 juin 1975 (cf. annexe III).

Les diagrammes à double entrée

En annexe III nous notons que les différences de réflectances de deux des canaux M.S.S. (Multi Spectral Scanner) de LANDSAT, $D_5 = R_{MSS5} - R_{MSS6}$ ou $D_4 = R_{MSS4} - R_{MSS6}$ sont des index de la turbidité de l'eau (b_p), la différence D_4 pouvant pourtant être modifiée par l'absorption chlorophyllienne (15, 58).

Dans un diagramme D_4 en fonction de D_5 , les points représentatifs d'une ligne de l'image, varient continuellement d'une eau claire à une eau plus turbide (figure 4, annexe III).

Nous nous proposons de simuler de telles variations. La figure 1, représente les variations de D_4 et D_5 avec les hypothèses suivantes :

b_p et C sont covariants (Equ. II-2, $p = 0,27, 0,60 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$) et c_p varie de 0 à 10 mg.m^{-3} .

L'interprétation de cette figure est aisée, sachant que les canaux M.S.S. sont peu sensibles à C .

La figure 2 présente lorsque $p = 0,60 \text{ m}^{-1}/\text{mg.m}^{-3}$ et pour deux types d'eau, $C = 1, 5 \text{ mg/m}^{-3}$ de pigments chlorophylliens, l'influence croissante sur D_4 et D_5 , d'un fond de sable à profondeur décroissante.

Le comportement très différent des deux phénomènes permet d'envisager la distinction de ces deux effets au moins pour les faibles hauteurs d'eau, si C n'est pas trop faible.

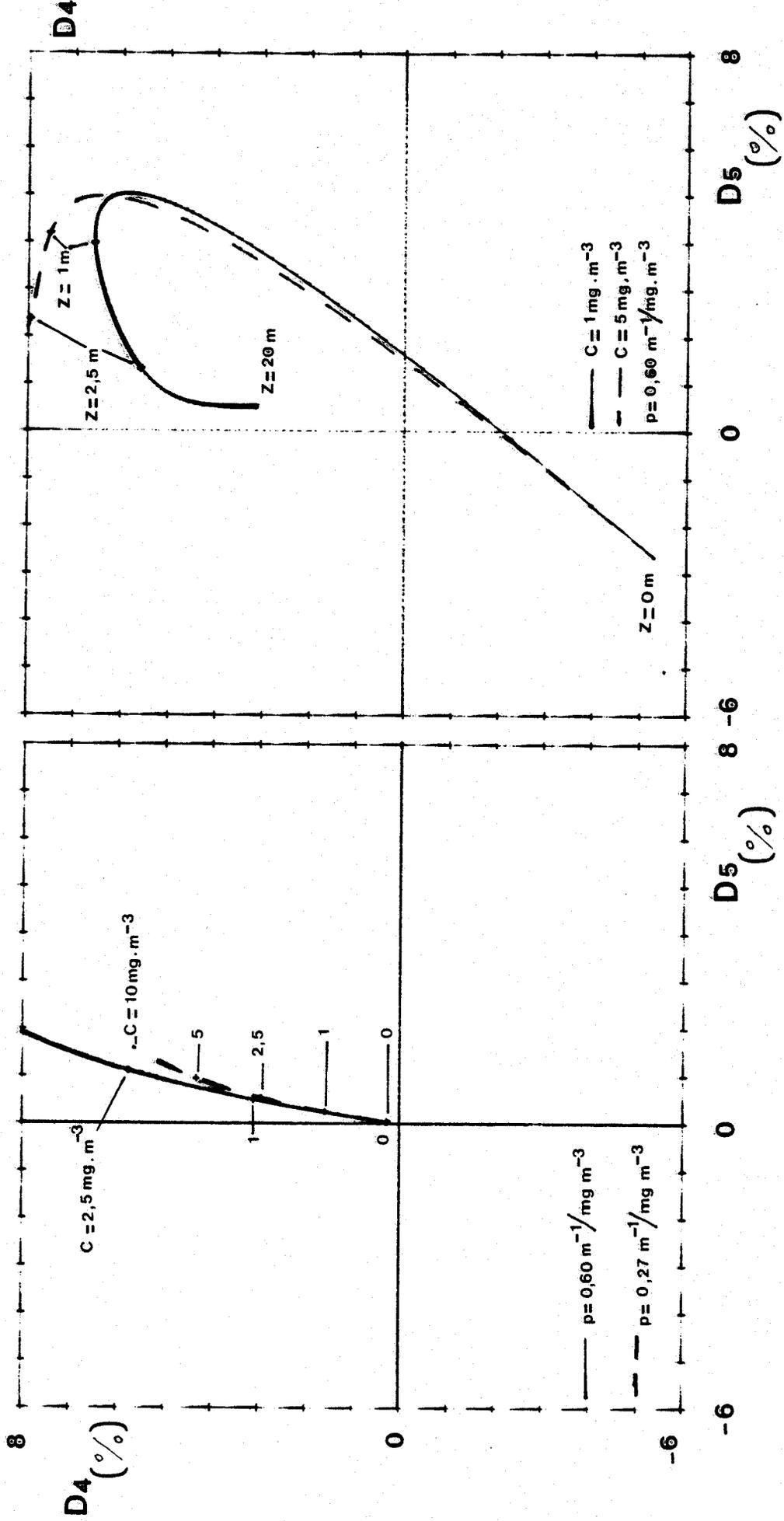


Figure I - Représentation dans le diagramme à double

entrée : $D_4 = A_{M554}^{M556}$ en fonction de $D_5 = A_{M555}^{M556}$, de l'influence de la concentration C de pigments chlorophylliens et de la turbidité $b_p = p \times C$. Deux valeurs de p sont représentées.

Figure II - Représentation dans le diagramme D4 en fonction de D5 de l'influence d'un fond de sable à la profondeur Z , pour deux types d'eau donnés : moyennement turbide ($C = 1 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-3}$) et turbide ($C = 5 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-3}$). On a utilisé le modèle d'absorption-diffusion M2.



Vérification expérimentale

Nous étudions une région englobant la partie sud du banc de Goodwin (localisation C, figure 1, annexe III).

Les points représentant les différences D_4 et D_5 obtenues sur cette région sont portés figure 3.

En I, nous trouvons les eaux les plus claires, correspondant d'ailleurs aux fonds de 50 mètres (figure 1, annexe III).

Lorsque l'on s'approche du banc sableux, la turbidité augmente, I vers II.

En II, sont situés les points du banc pour lesquels il n'est pas possible de trancher entre turbidité (b_p et C) et influence du fond. En III, l'influence du fond est évidente, la hauteur d'eau étant suffisamment faible.

Une telle étude facile à réaliser permet de faire apparaître les points pour lesquels l'influence du fond est importante. La méconnaissance de tous les paramètres utiles (C, b_p , ρ_λ) ne permet pas d'espérer retrouver la profondeur du fond avec exactitude.

14278

1 mois
RFA → 23/04/95

28 FEV. 1995

**BIBLIOTHEQUE DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**
SERVICE COMMUN DE LA DOCUMENTATION
Avenue Henri Poincaré
C.S. 6963
B. P. 155
59653 VILLENEUVE D'ASCO CEDEX

NUM	: 950254829
DATE	: 24.02.95
EMPRUNTEUR	: 830622101
ENTITEUR	: BIBLIOTHEQUE DE L'UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR
ADRESSE	: CHATEAU ST MICHEL RN 98 BP 122
PRETEUR	: 83957 - LA GARDE CEDEX
ETAT	: 590092102
ISBN	: 3
AUTEUR-M	: BAUSSART, NORBERT
TITRE-M	: ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA REFLEXION DU FOND MARIN...
PAYS	: FRA
EDITEUR	: .
ANNEE	: 1980
NB-VOL	:
PAGES	:
AUTEUR-PART	:
TITRE-PART	:
COTE	: 9-10
OBSERV	: THESE LILLE I OPT ATMOSPHERIQUE
SOURCE	: CD THESE
LECTEUR	: COURBOULAY
SUPPORT	: ORIGINAL

50326
1980
9-10

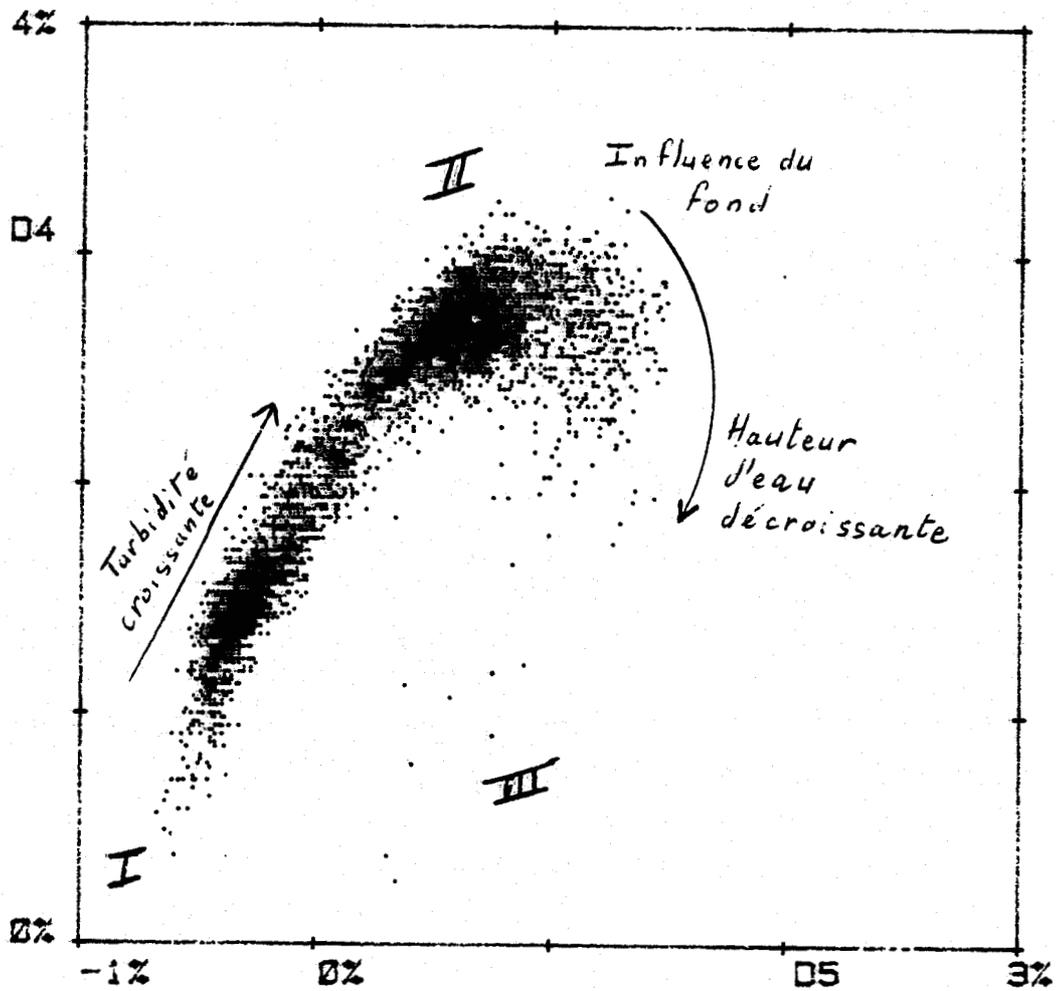


Figure III - Dans le diagramme (D4, D5) situation des points représentatifs de la région de GOODWIN : I correspond à des profondeurs de 50 mètres, III à des points émergés ou très proches de la surface, II les points du banc de sable pour lesquels il n'est pas possible de distinguer l'effet du fond, d'un changement de turbidité.

ANNEXE V

ORGANIGRAMME D'UN PROGRAMME DE TRAITEMENT SPECIFIQUE D'IMAGES LANDSAT

-.-.-

STADE PRELIMINAIRE

Les bandes magnétiques (CCT) relatives aux scènes LANDSAT nous intéressent sont produites par la station italienne TELESPAZIO à FUCINO (63). L'emploi de ces bandes sous leur forme originale n'est pas aisé, bandes en DEV. Nous réécrivons la bande sous une forme d'accès plus facile, bande labellée (bande en FILE) que nous dirons "bande type LOA". Pendant cette procédure, nous éliminons les blocs de calibration non utilisables. Un bloc du fichier créé correspondant à une ligne de la prise de vue est alors formé de la succession de cette même ligne pour chacun des quatre canaux MSS. Parallèlement nous décodons les deux premiers fichiers de la bande TELESPAZIO, qui contiennent des paramètres concernant l'image (position du soleil, date de la prise de vue, identification de la zone...) et les tables de conversions (mesure digitalisée en mots de 6 bits - 0 à 63 - à bord du satellite et bande fournie en mots de 8 bits - 0 à 255 -).

La bande TELESPAZIO correspond à une grille de 3600 x 2286 points pour chacun des canaux MSS. Les 3000 à 3450 points d'une ligne de la prise de vue étant complétés de zéro pour atteindre la longueur totale de 3600 points. Ceci permet par un décallage progressif vers la gauche (c'est à dire vers l'ouest) du premier point non nul de la ligne, de minimiser l'effet de distorsion de la prise de vue par rotation de la terre. Par image traitée nous entendons un tableau de 256 x 256 rempli de mots de 8 bits. A une telle image correspond une zone plus large sur la bande magnétique - les pas de calculs en ligne et colonne étant généralement différents de 1 -.

ORGANIGRAMME

L'organigramme suivant est celui d'un programme permettant de créer à partir de la bande type LOA, une ou plusieurs images visualisables.

La visualisation de ces images se fait sur le système SEIN - PERICOLOR, qui permet l'affichage d'une image de 256 lignes x 256 colonnes composées d'entiers de 0 à 255 (mots de 8 bits).

Les diverses parties du programme sont reproduites ci-dessous. Les chiffres entre parenthèses renvoient aux commentaires suivants :

1) Cet organigramme convient pour deux programmes différents. Le premier, que nous désignerons par (P1), faisant un simple moyennage sur le rectangle NPL x NPC, pour le(s) canal (canaux) MSS que l'on désire sélectionner. Le second programme (P2) permet l'une des deux études suivantes :

- a) moyennage de 2 canaux et/ou rapport de ces 2 canaux ;
- b) 2 différences de 2 canaux quelconques et/ou rapport de ces 2 différences.

Ce second programme nécessite la calibration des canaux MSS. Les résultats des calculs étant des nombres réels de magnitude à priori mal définie, le programme effectue un recallage automatique des échelles, avant de réécrire la donnée sous forme entière. Suivant l'étude demandée, une à quatre images peuvent être sélectionnées.

2) La mesure dans le canal MSS7 (proche infra-rouge) est très différente sur terre (valeur élevée) et sur mer (valeur très faible) où seuls les effets de réflexion sur la surface (le "glitter") et atmosphériques sont mesurés ; la mer est noire pour MSS7. On peut ainsi définir le test "mer" suivant : quand la valeur mesurée dans MSS7 est inférieure à un certain seuil, le pixel considéré correspond à un point marin. Dans le cas d'une surface marine très agitée en présence d'écume, ce principe peut être mis en défaut (14). Le doute peut être levé par une étude des différents canaux ; ceci n'est pas fait ici.

3) Les trois compteurs principaux sont :

L le numéro de la ligne à lire sur la bande magnétique ;

LN le numéro de la ligne à écrire sur un fichier de manoeuvre sur le disque de l'unité centrale. C'est aussi le numéro de la ligne de l'image traitée ;

LL précise le changement de groupe de lignes : à NPL lignes de la bande magnétique correspondant une seule ligne de l'image traitée.

Nous conservons ainsi plus de 99 % des points "marins". Les points ne pouvant être écrits sous une forme entière comprise entre 0 et 255, sont suivant le cas rejetés dans la classe 0 ou la classe 255.

Les points "non-marins" sont arbitrairement mis à 0. Ceci permet un important

- 4) La sortie de la boucle sans fin (A-A) se fait par branchement au point (B). On y accède aussi par la détection du label de fin de fichier de la bande magnétique type LOA.
- 5) Pour chacune des images que l'on désire créer, on utilise un fichier temporaire, ici noté TAB. Il comprend 256 lignes de 256 points. A chaque valeur du tableau est associée la somme de NPL x NPC valeurs v(I) déduites de la lecture de la bande magnétique. Quand l'indice de colonne dépasse 3 600, la valeur TAB(k) correspondante est fixée à zéro.
- 6) Détermination par le critère sur MSS7 (cf §2) de la mesure ou non d'un point marin. Si l'un au moins des points du rectangle NPL x NPC est rejeté, tout le rectangle, c'est-à-dire le point de l'image créée, est rejeté. Pour les points marins, on a : $IER(k) = 0$, et 1 autrement.
- 7) Lors de l'utilisation du programme (P2), on a besoin de calculer les variables suivantes pour effectuer le recallage d'échelle annoncé en (§1).

$$MOY = \sum_{k=0}^{255} TAB(k) \times (1 - IER(k)) + MOY$$

$$CAR = \sum_{k=0}^{255} TAB(k) \times TAB(k) \times (1 - IER(k)) + CAR$$

$$NBP = \sum_{k=0}^{255} (1 - IER(k)) + NBP$$

La grandeur NBP définit le nombre de points "marins".

- 8) Chacune des images créées par le programme (P2) est composée de nombres réels, devant être réécrits sous la forme d'un entier de 0 à 255. L'image est ainsi disponible sous une forme visualisable sur le système SEIN- Péricolor du LOA.

Nous convenons de ne conserver que l'ensemble des points éloignés de moins de trois fois l'écart-type σ , autour de la valeur moyenne m (15). Ces deux valeurs étant déterminées pour les seuls points marins, par les relations suivantes :

$$m = \frac{\text{MOY}}{\text{NBP}}$$

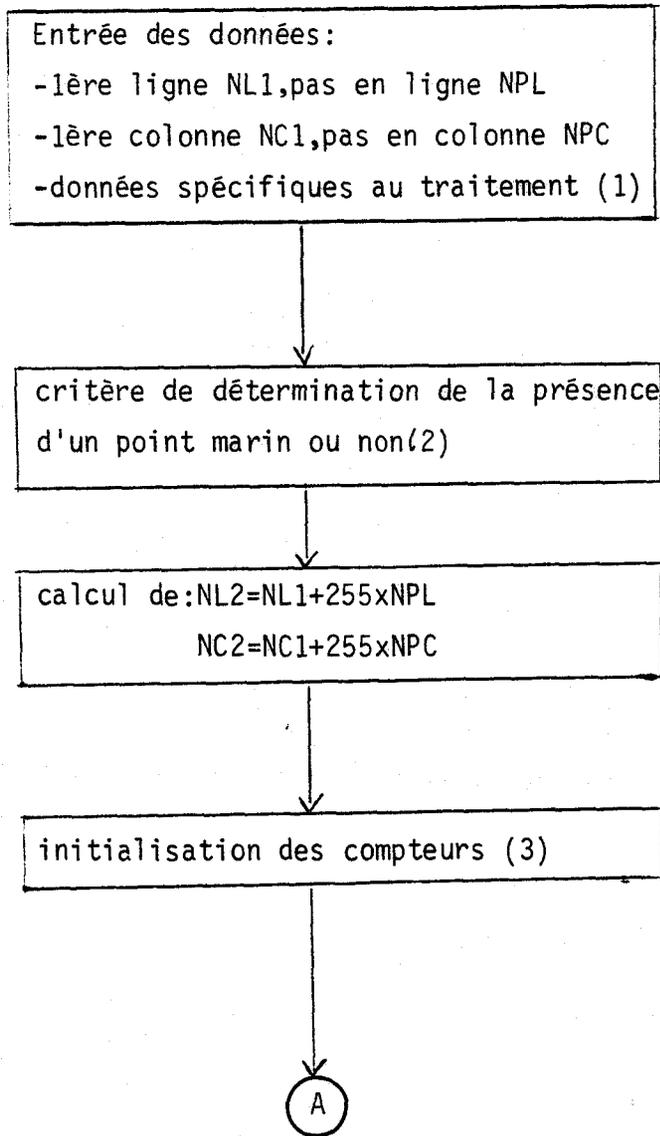
$$\sigma^2 = \frac{\text{CAR}}{\text{NBP}} - (m)^2$$

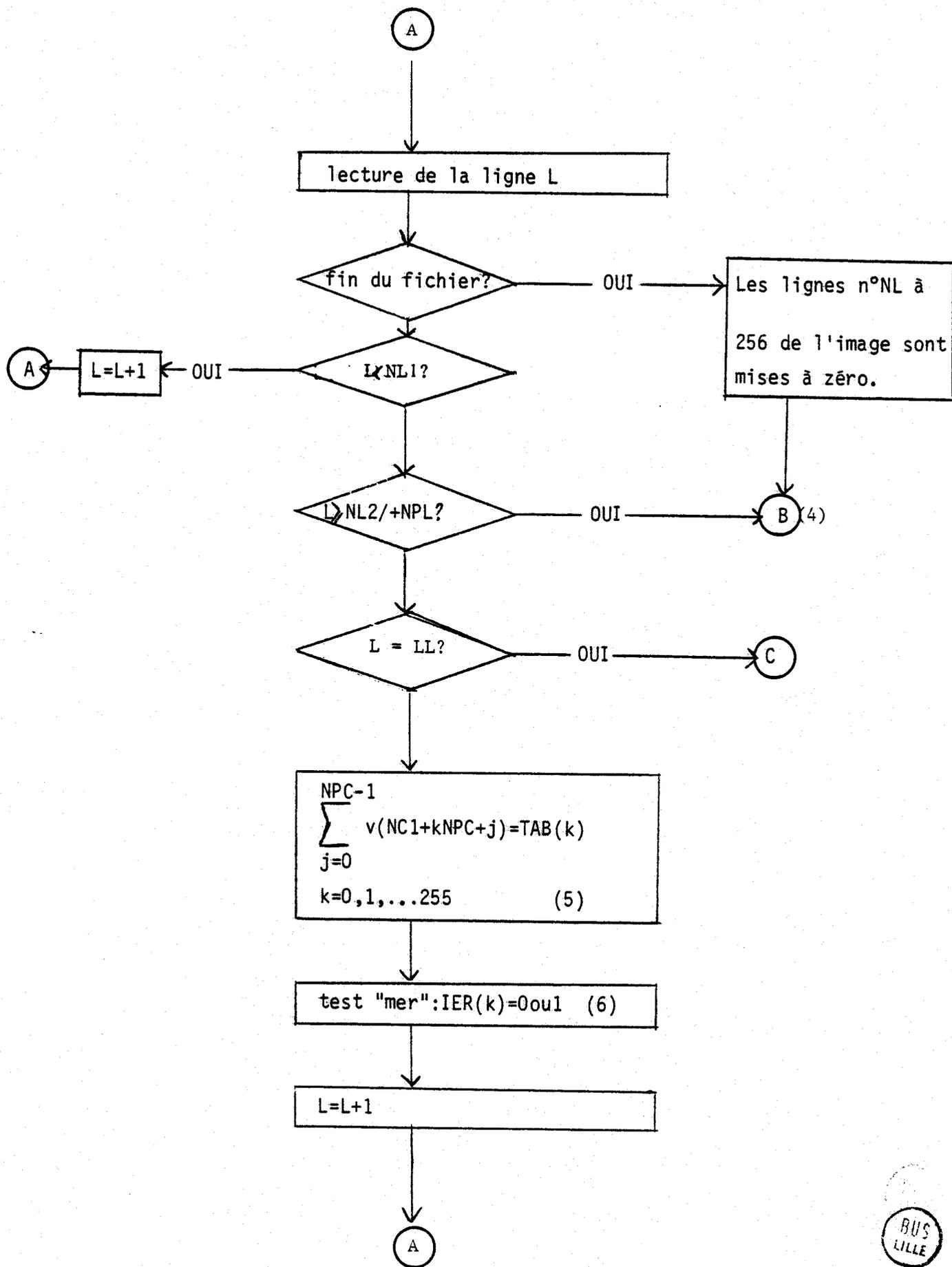
contraste sur le bord de côte où, généralement le signal (mesure MSS, ou signal traité obtenu à partir de plusieurs canaux) augmente rapidement quand on approche de la côte. Il est ainsi possible de mettre en évidence les jetées de l'avant-port de DUNKERQUE et de distinguer l'eau du port.

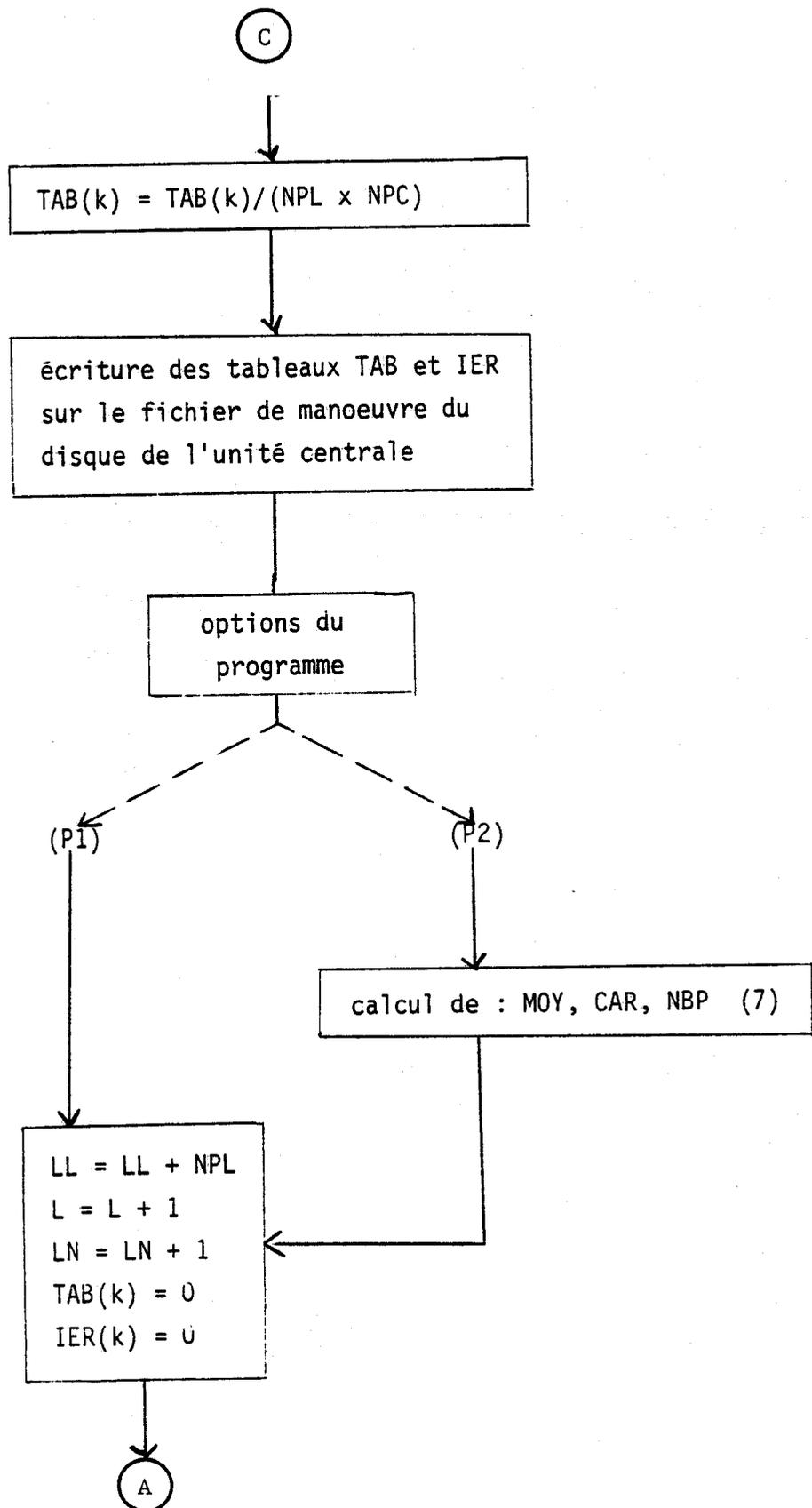
9) A chacune des images traitées nous imprimons l'histogramme, calculé à partir des points marins : la classe 0 contenant les moindres "non-marins" étant exclue du calcul. Cet histogramme est celui de l'image visualisable.

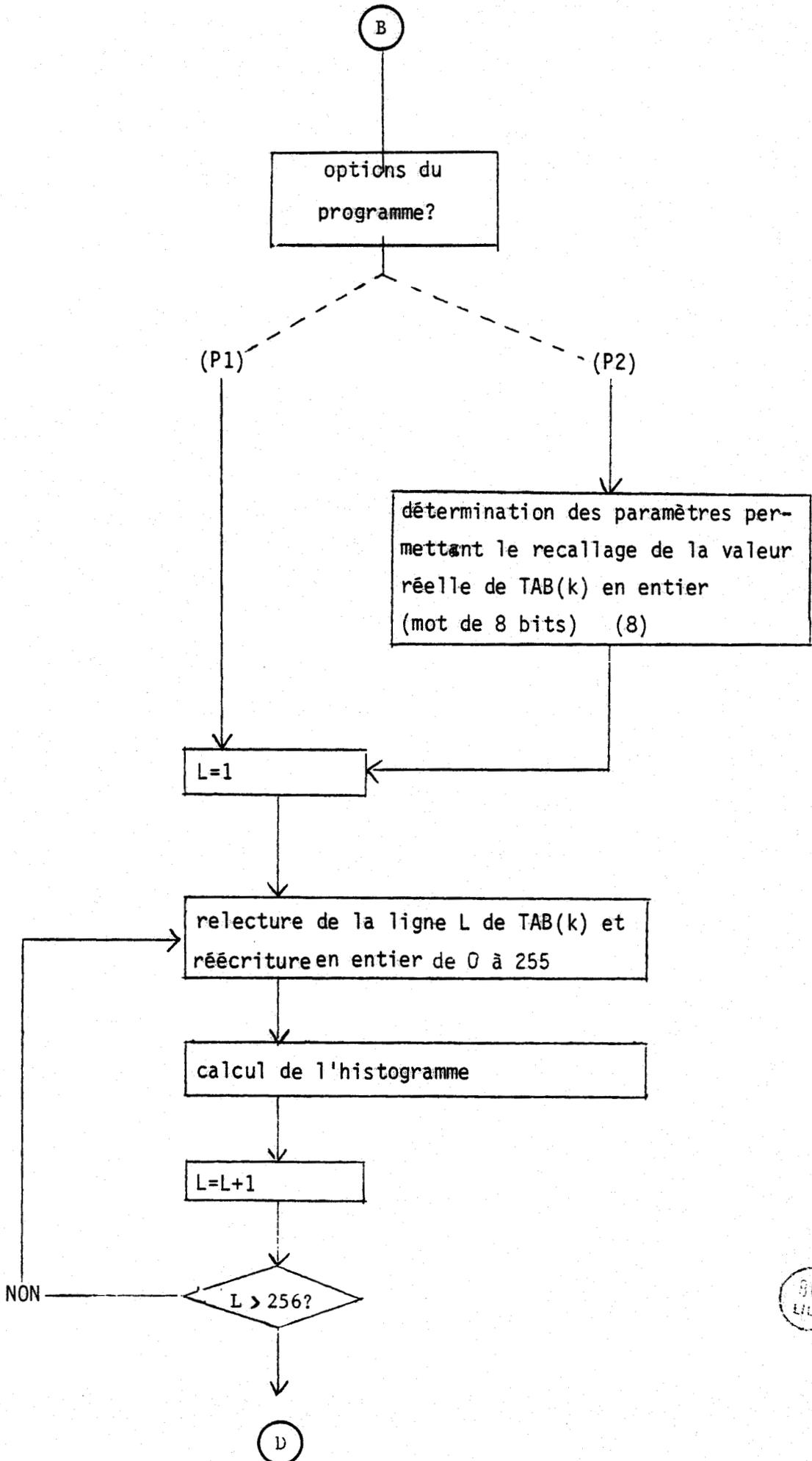
A titre de comparaison, nous sortons les histogrammes de la même zone obtenu pour chacun des canaux MSS utilisés, ceux-ci n'ayant subi aucun traitement préalable.

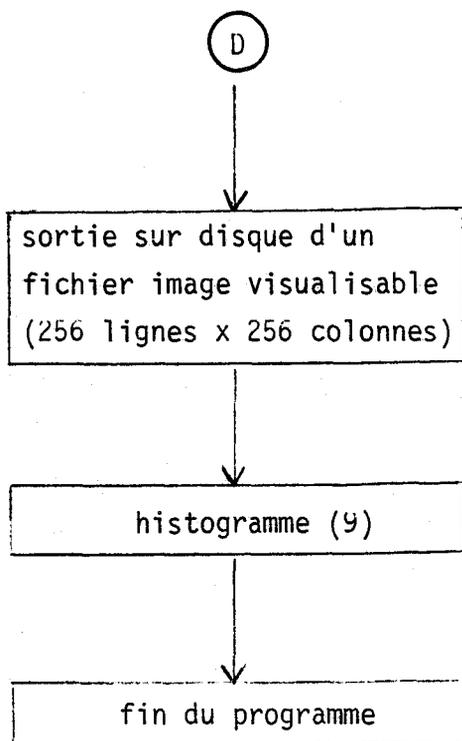
Nota : Les programmes dont nous présentons ici l'organigramme ont permis de créer puis d'étudier (ex. : Annexe IV) les images présentées en annexe III.











"FIGURES & TABLEAUX"

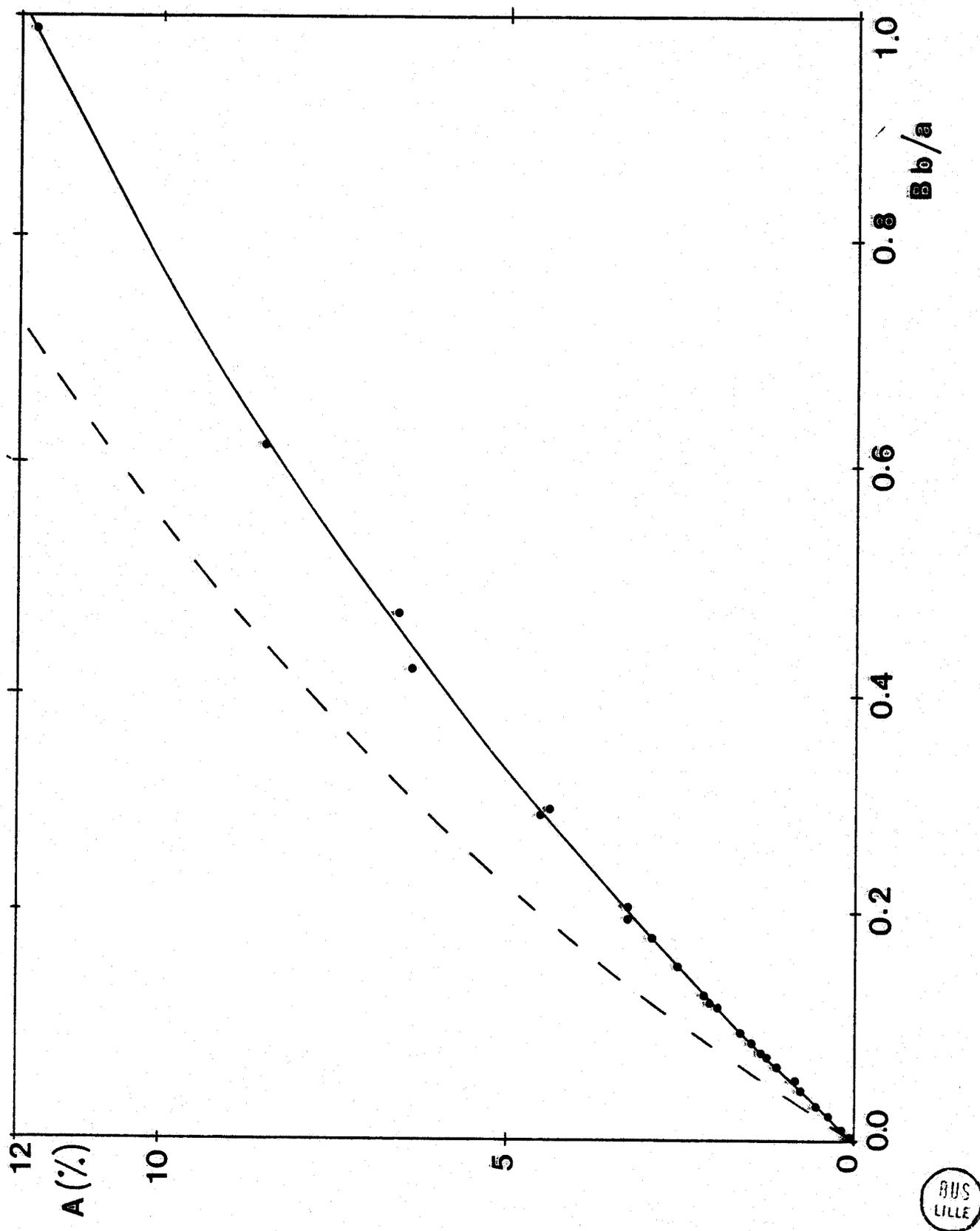


Figure I-1 - Albédo de rétrodiffusion A^+ en fonction de $\frac{Bb}{a} = B \times \left(\frac{1}{1-\omega} - 1\right)$. La droite en trait continu (polynôme I-14) présente un bon accord avec les points théoriques il en est de même pour les différentes formules existant, excepté celle de JAIN et MILLER (traits tiretés).

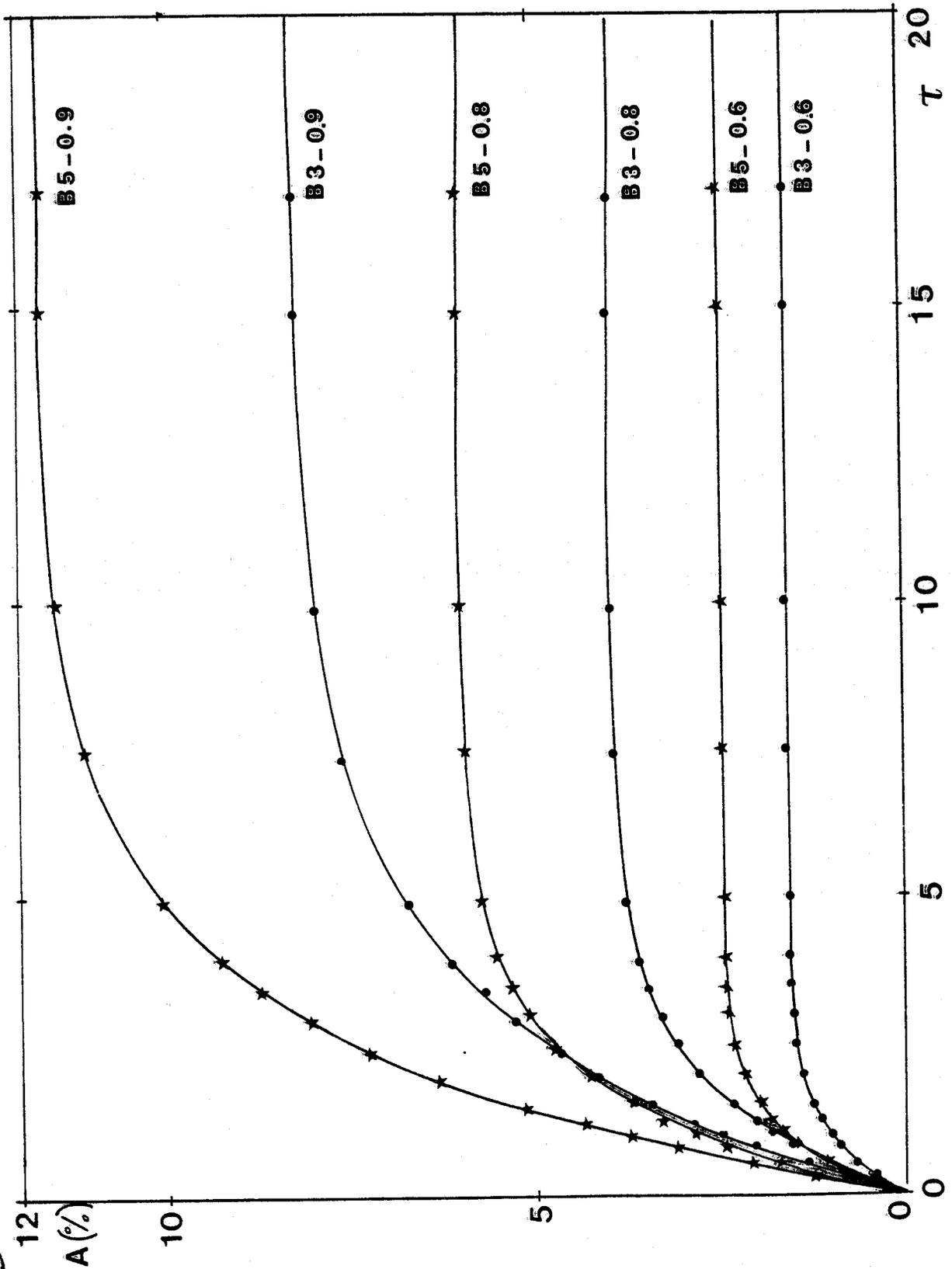


Figure I-2 - Comportement de l'albedo de rétrodiffusion A (%) avec l'épaisseur optique τ du milieu. Deux fonctions de phase (B3 et B5) et trois valeurs de m_0 (0,6 ; 0,8 ; 0,9) sont représentées. Le modèle (courbes en traits pleins I-21, 22a, 24) représente fidèlement les points calculés par le H.S..

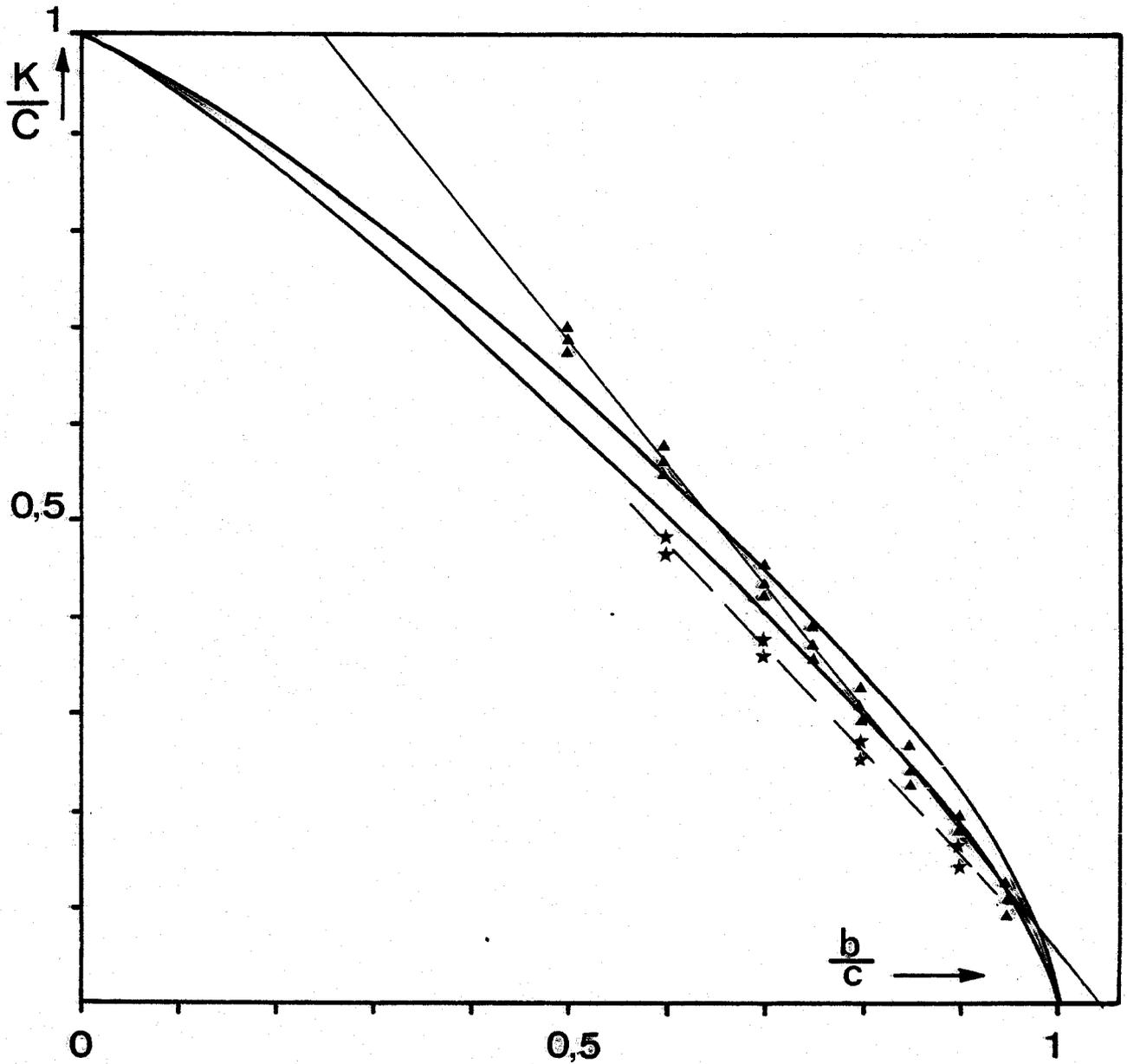


Figure I-3 - Représentation dans le plan ($\omega_0 = \frac{b}{c}$; $\frac{K}{C}$) des valeurs moyennes $\langle K/c \rangle$, pour les H.S., \blacktriangle pour les OSD, \star et de leurs droites moyennes, équations I-25 et I-25a. Les courbes $\frac{K^\infty}{C}$ du comportement en régime asymptotique sont également présentées pour B3 et B5.

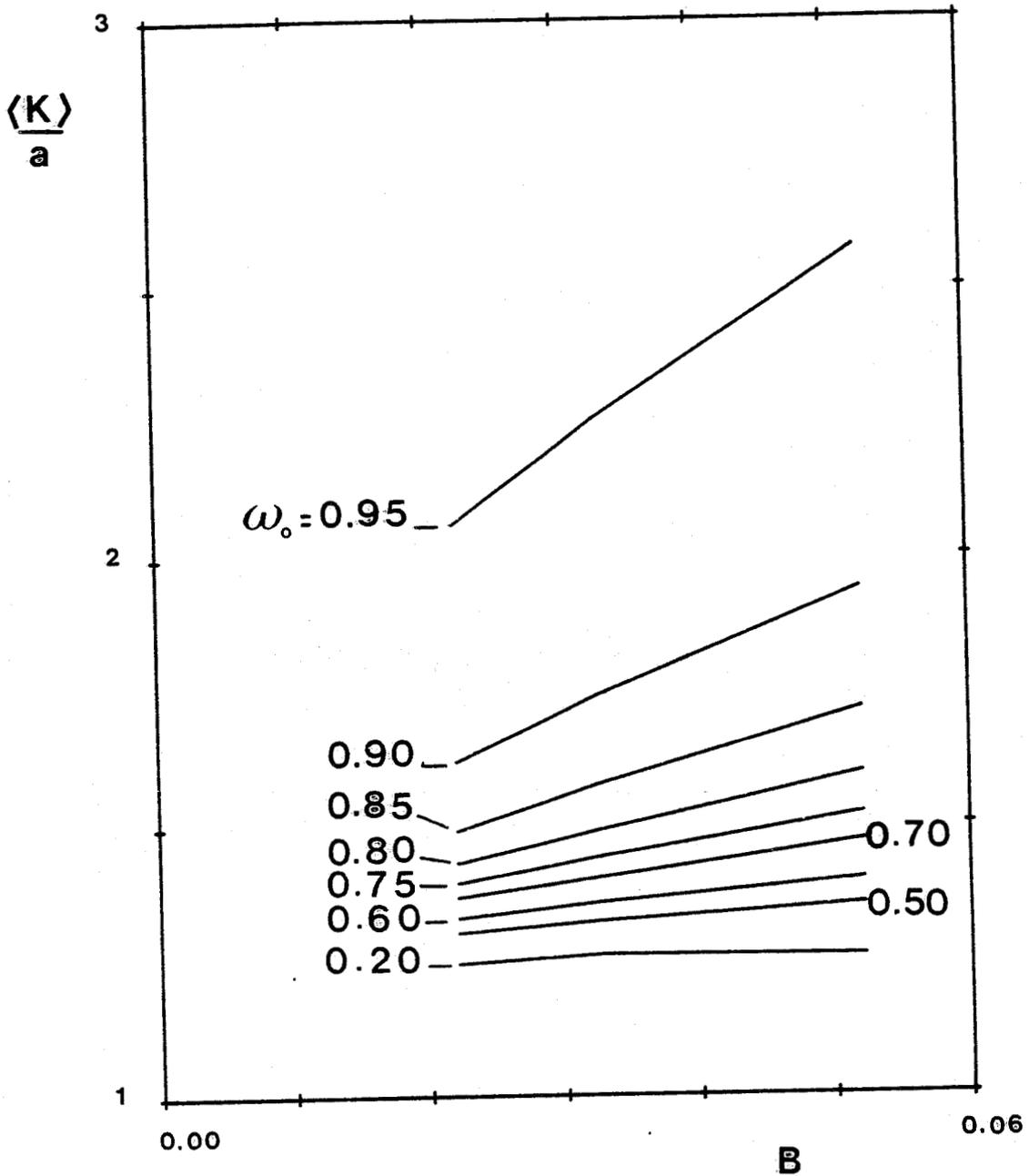


Figure I-4 - Variations de $\langle \frac{K}{a} \rangle = \langle \frac{K}{c} \rangle \times \frac{1}{1-\omega_0}$ avec la constante de rétro-diffusion B , ω_0 étant donné en paramètre. La représentation de $\langle K \rangle / a$ permet de mieux mettre en évidence les influences de B et ω_0 . Il est donc nécessaire d'utiliser l'équation I-26 préférentiellement à la droite obtenue par I-25 et présentée en figure I-3.



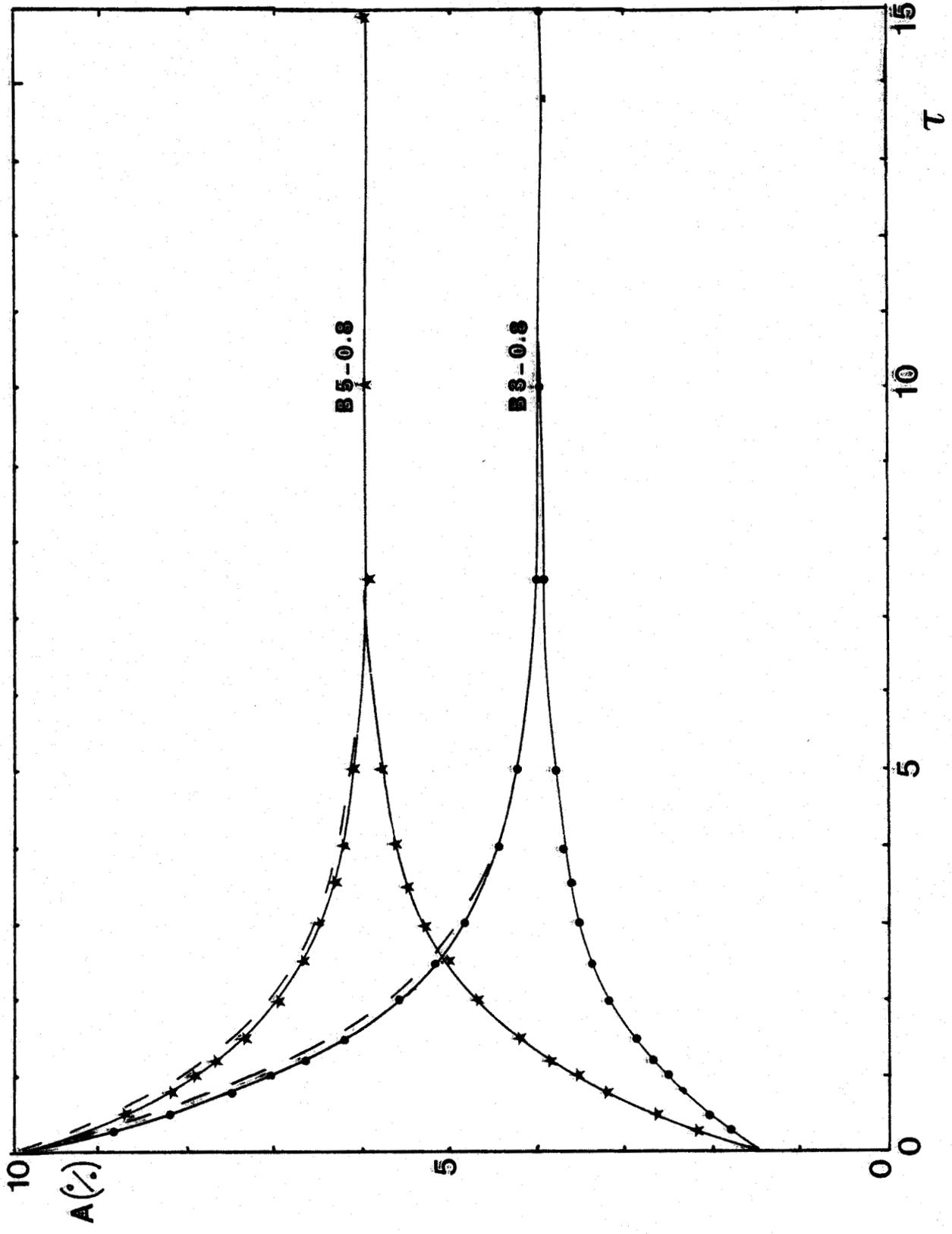


Figure I-5 - Comportement avec l'épaisseur optique τ de l'albédo $\bar{A}(\tau, \omega)$ pour les fonctions de phase B3 et B5, $\omega_0 = 0,8$ et les réflectances du fond : $\rho = 1,4\%$ (valeur non discutée dans le texte) et $\rho = 10\%$. Les courbes en traits tiretés sont effectuées en supposant $K'/c = K/c$, celles en traits pleins : $K'/c \neq K/c$.



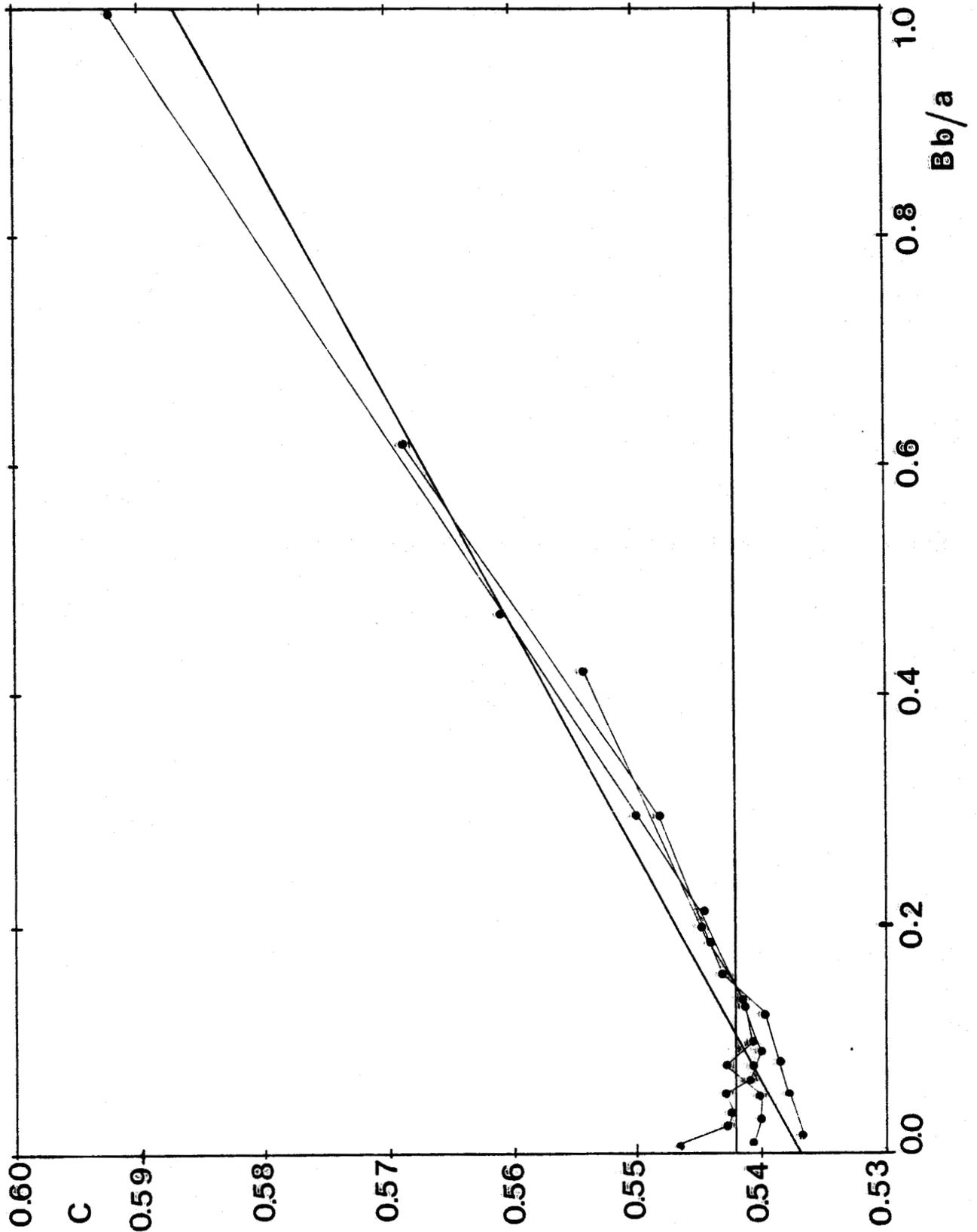


Figure I-6 - Comportement du terme de transmission à travers l'interface $t = A^+ / A^-$ en fonction de l'importance de la rétrodiffusion représentée par la variable $\frac{Bb}{a}$. Nous avons tracé la valeur moyenne $t \approx 0,542$ pour $\frac{Bb}{a} < 0,3$.

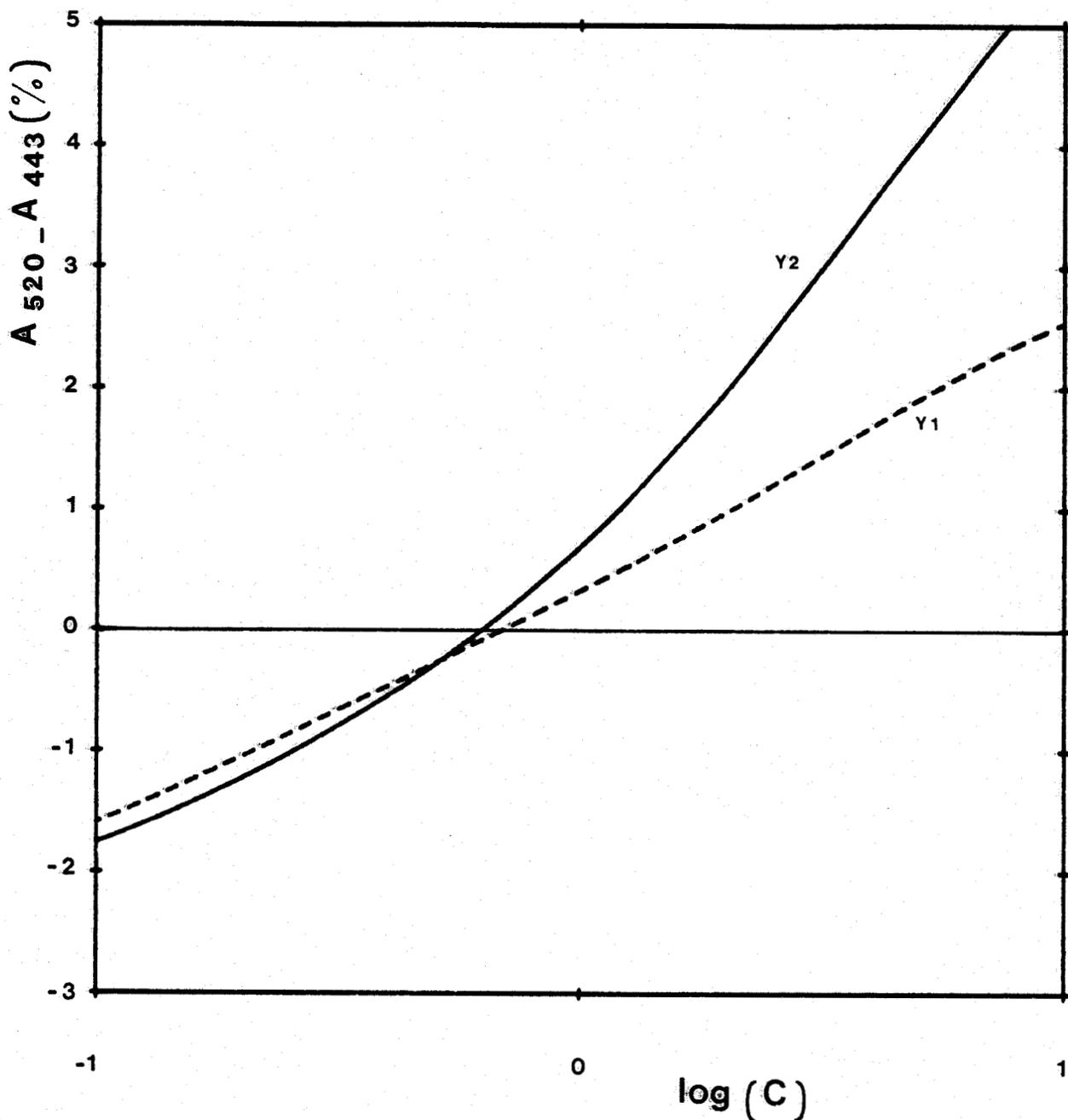


Figure II-1a - Algorithmes "différence" Y1 et Y2 : la figure montre la correspondance entre la différence d'albédo $A_{520} - A_{443}$ et la valeur C du contenu en pigments de type chlorophyllien correspondant, obtenu en utilisant les modèles d'absorption-diffusion Y1 et Y2 (équation II-3a).



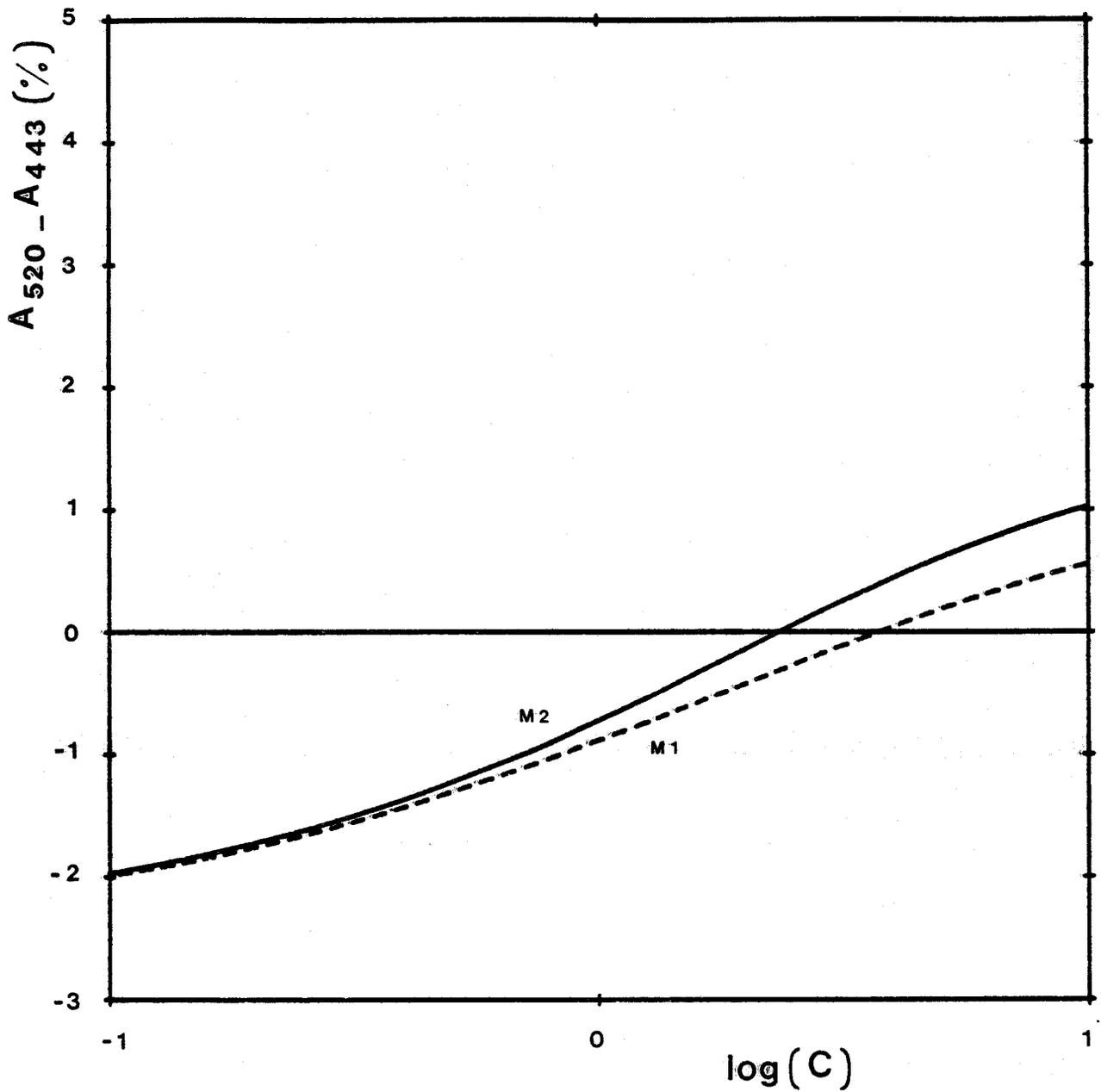


Figure II-1b - Algorithmes "différence" M1 et M2 : même légende que figure II-1 pour les modèles M1 et M2 (équation II-3b).



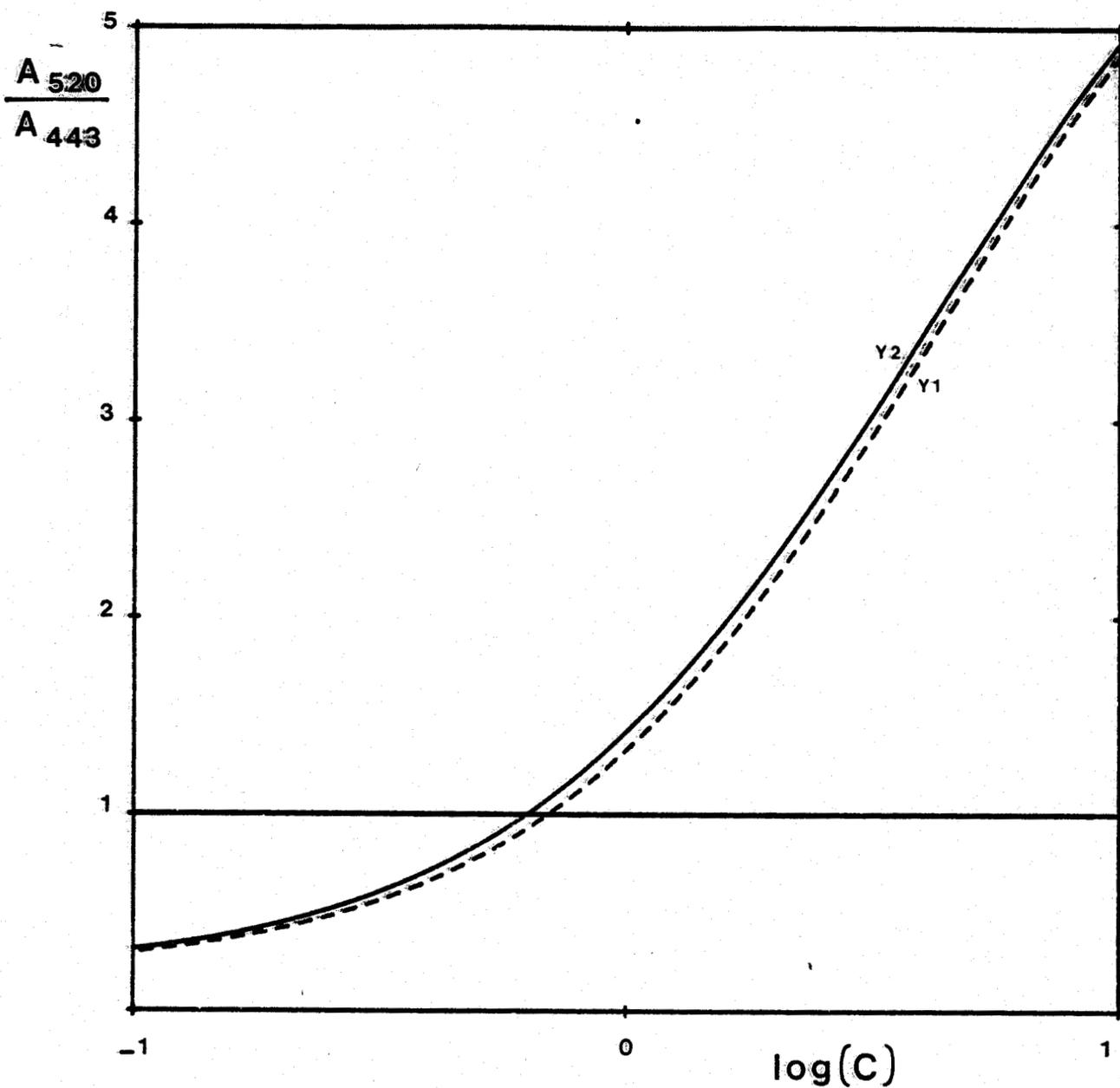


Figure II-2a - Algorithme "rapport" Y1 et Y2 : même légende que figure II-1a, concernant la mesure du rapport A_{520}/A_{443} .



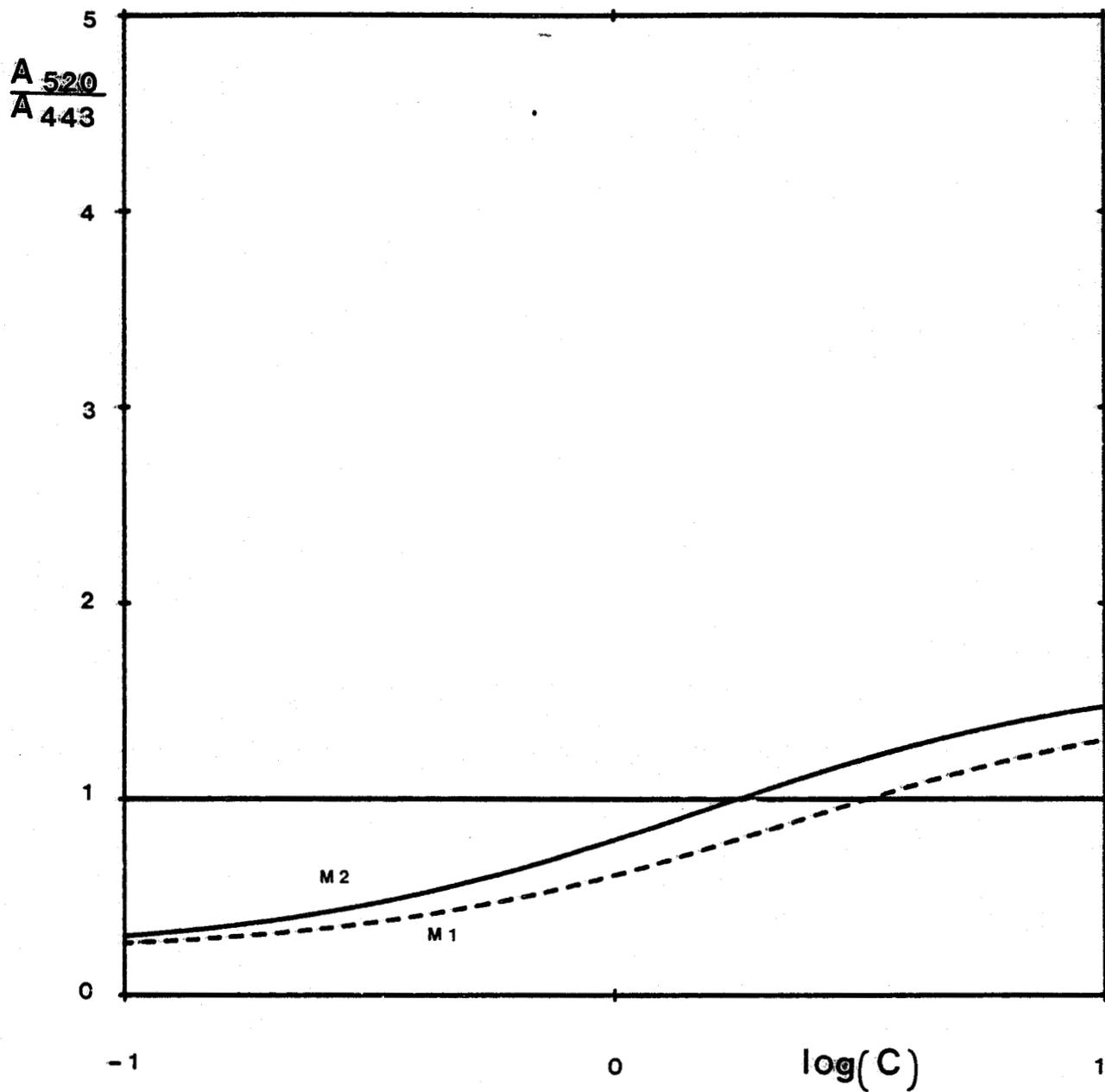


Figure II-2b - Algorithmes rapport M1 et M2 : même légende que figure II-1b concernant la mesure du rapport A_{520}/A_{443} .



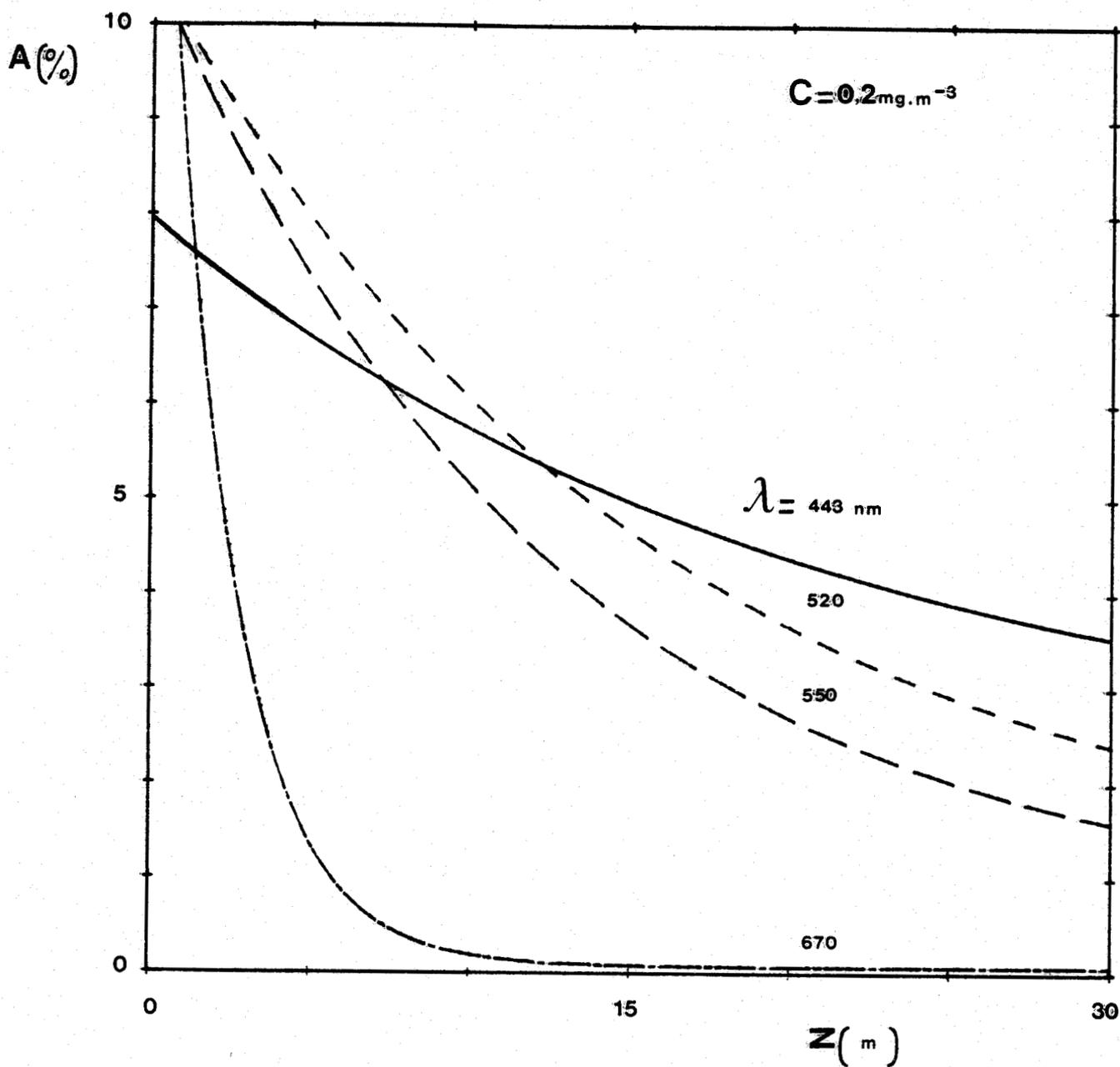


Figure II-4a - Influence de la présence d'un fond de sable situé à une profondeur de Z mètres, sur la valeur de l'albédo A , en %.
On a choisi une eau claire, $C = 0,2 \text{ mg.m}^{-3}$, et le modèle Y2.
Les quatre longueurs d'onde du radiomètre CZCS/NIMBUS 7 sont représentées.

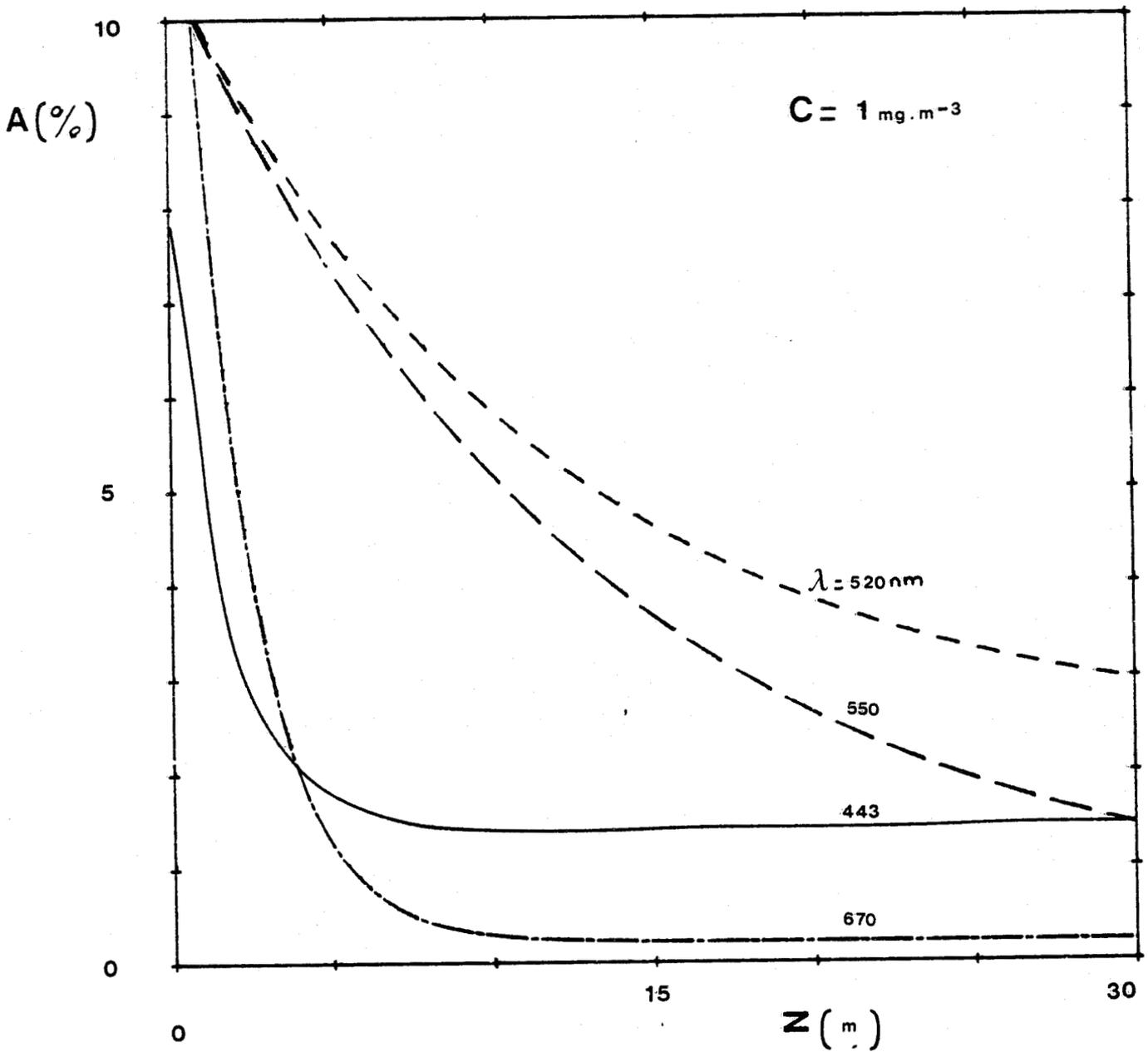


Figure II-4b - Môme légende qu'en figure II-4a pour une eau moyennement turbide, $C = 1 \text{ mg.m}^{-3}$.



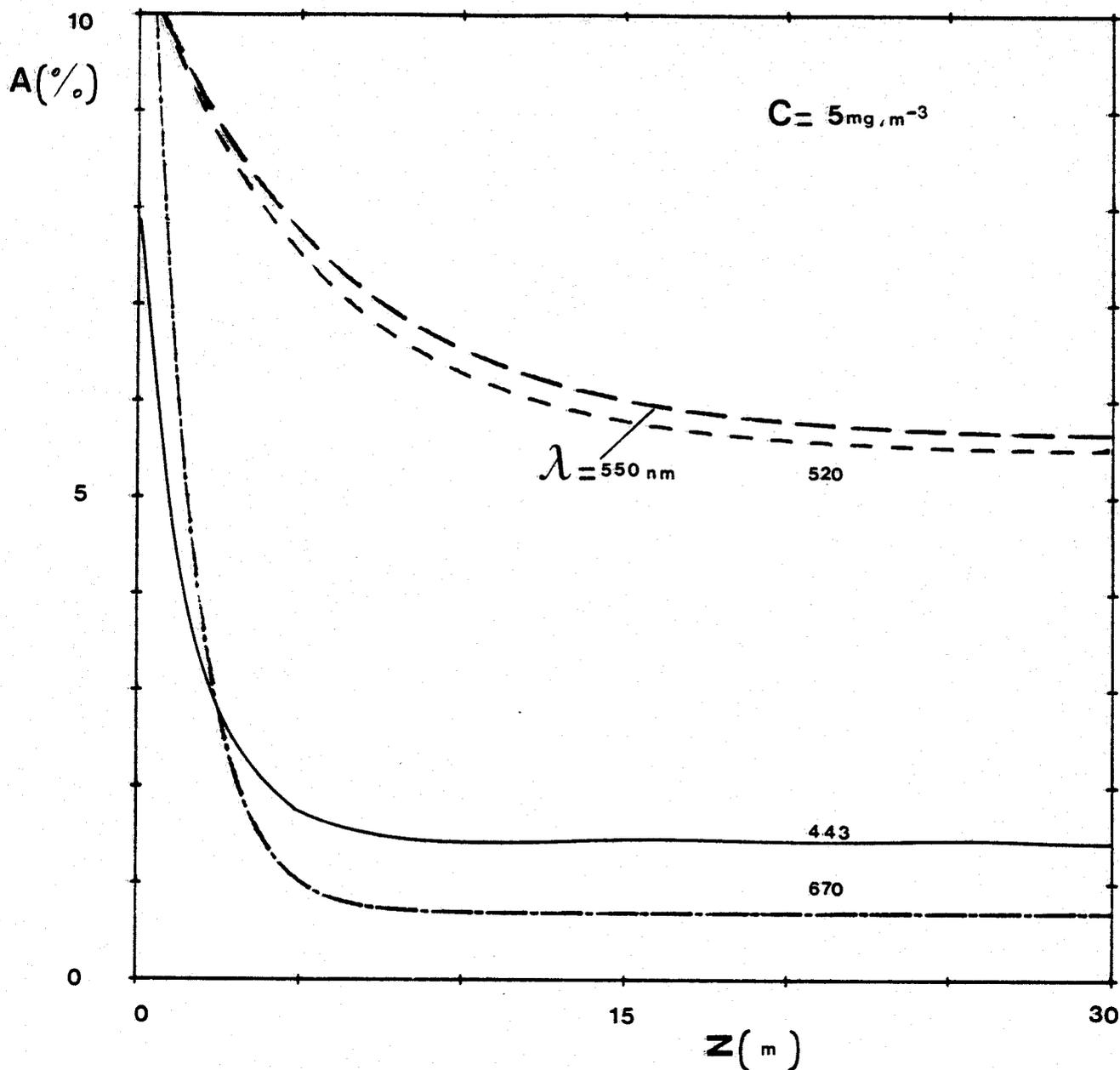


Figure II-4c - Môme légende qu'en figure II-4a, pour une eau turbide,
 $C = 5 \text{ mg.m}^{-3}$.



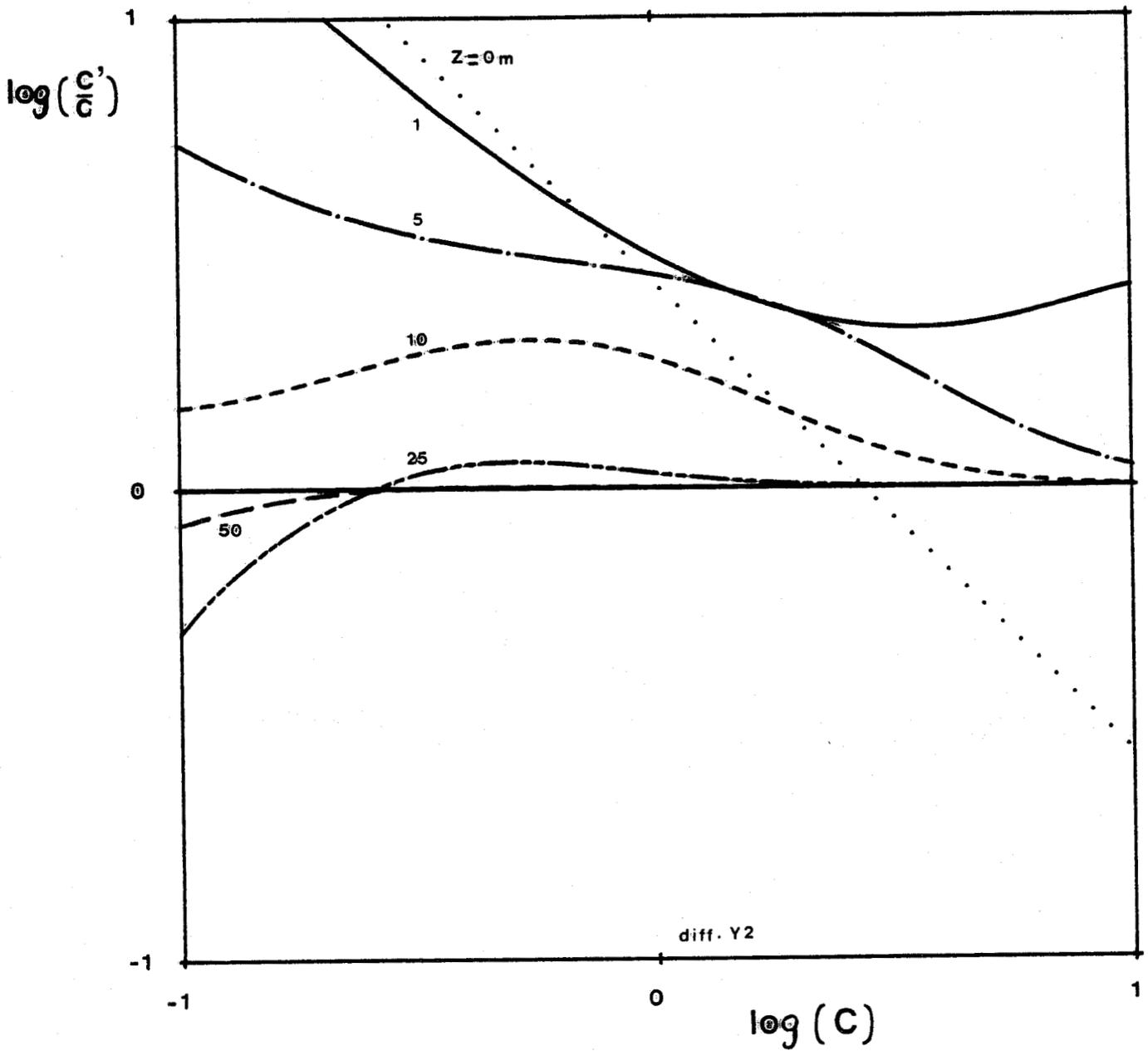


Figure II-5a - Influence de la présence d'un fond de sable situé à profondeur finie Z , sur la valeur C' du contenu en pigments chlorophylliens retrouvée par l'utilisation de notre algorithme différence Y2. La différence est $A_{520} - A_{443}$, les courbes sont indexées avec la profondeur Z du fond de sable ; C et C' (mg.m^{-3}) sont respectivement la valeur exacte du contenu en pigment chlorophyllien et celle retrouvée par utilisation de notre algorithme. Les échelles sont logarithmiques. Nous noterons qu'une ordonnée est représenté le logarithme du rapport $\frac{C'}{C}$.



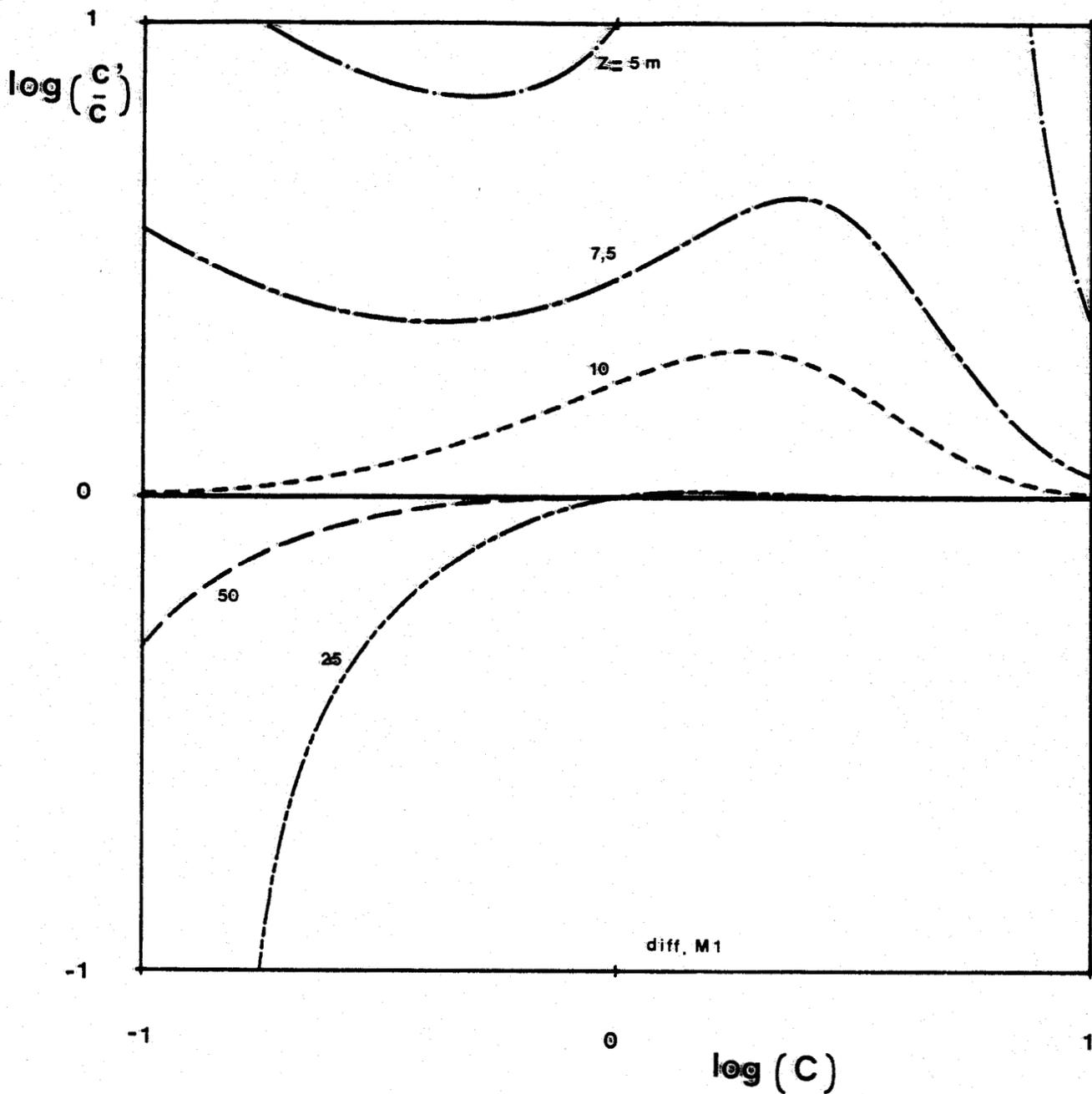


Figure II-5b - Meme légende qu'en figure II-5a, en utilisant l'algorithme différence M1.



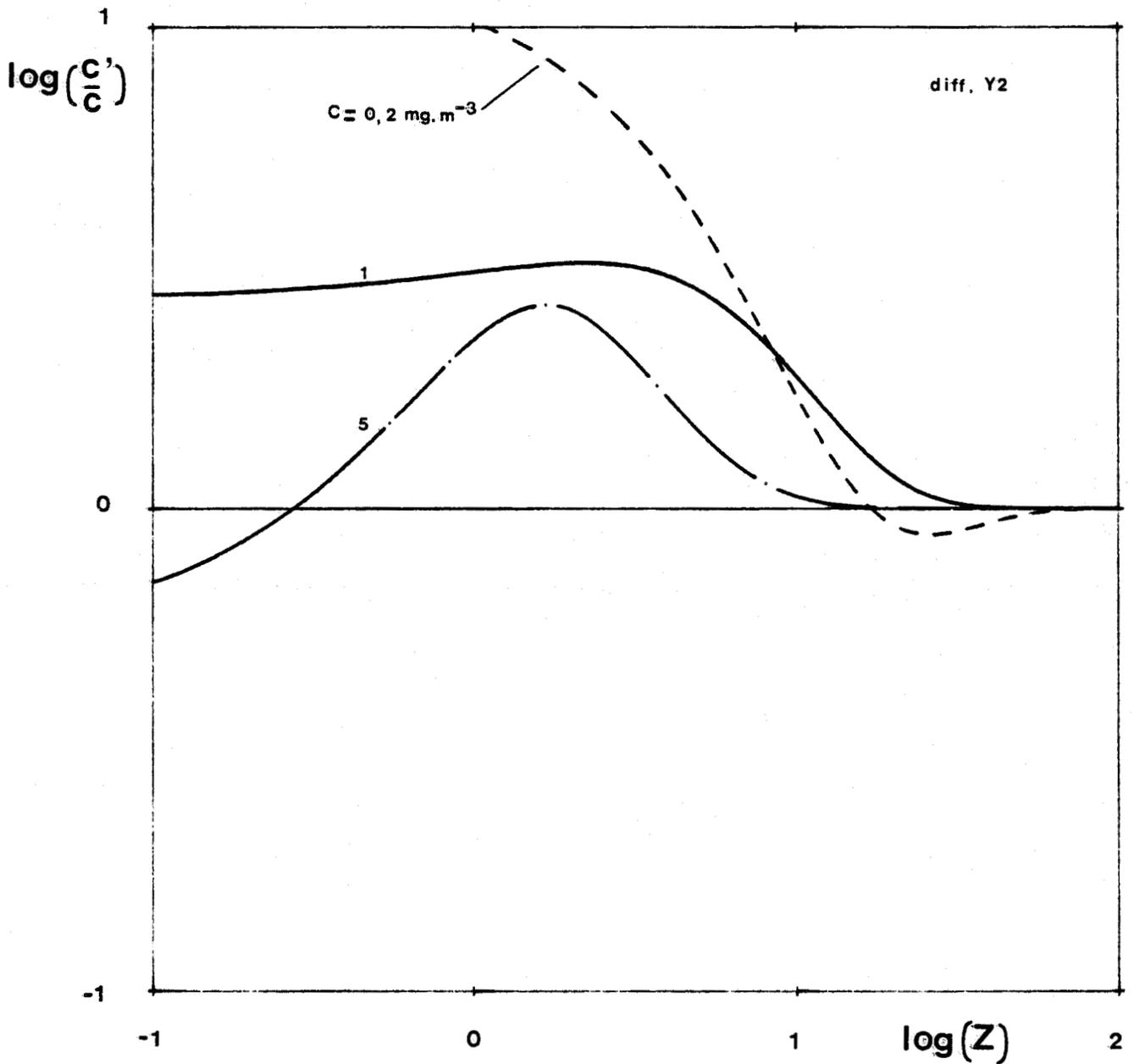


Figure II-6a - Cette figure montre pour les trois types d'eau introduits en § IV, comment la présence d'un fond de sable à profondeur Z finie, en modifiant la valeur de la différence $A_{520} - A_{443}$ par rapport à celle du seul milieu marin, modifie la valeur C' du contenu en pigments chlorophylliens obtenu par utilisation de notre algorithme. Le modèle d'absorption diffusion est Y2. C'est la valeur exacte (en mg.m^{-3}) du contenu de l'eau en pigments chlorophylliens. Les échelles sont logarithmiques.



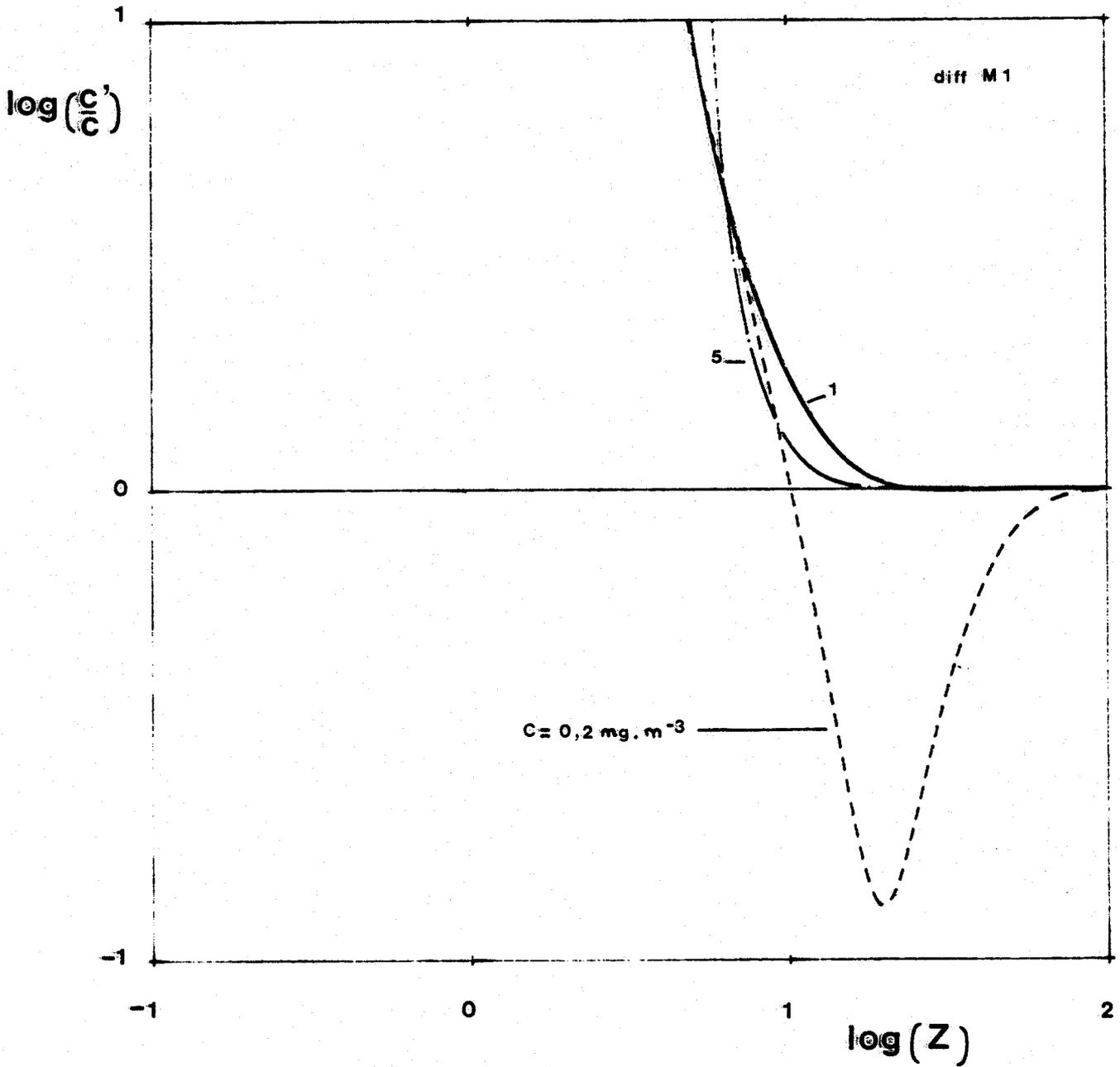


Figure II-6b - Meme légende qu'en figure II-6a, le modèle d'absorption diffusion choisi étant M1.



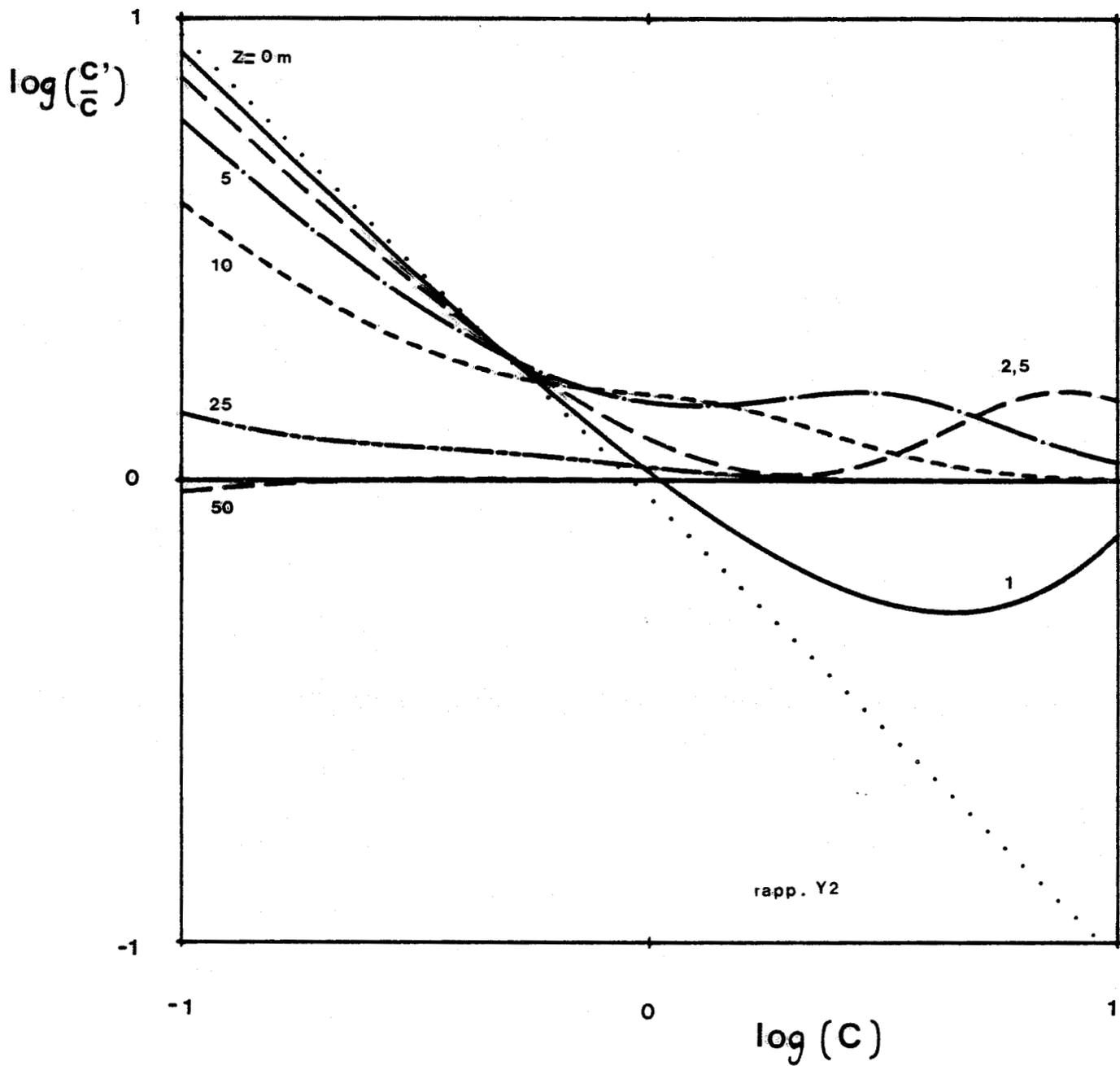


Figure II-7a - Meme légende qu'en figure II-5a, en utilisant l'algorithme rapport Y2. Le rapport utilisé étant $\frac{A_{520}}{A_{443}}$.



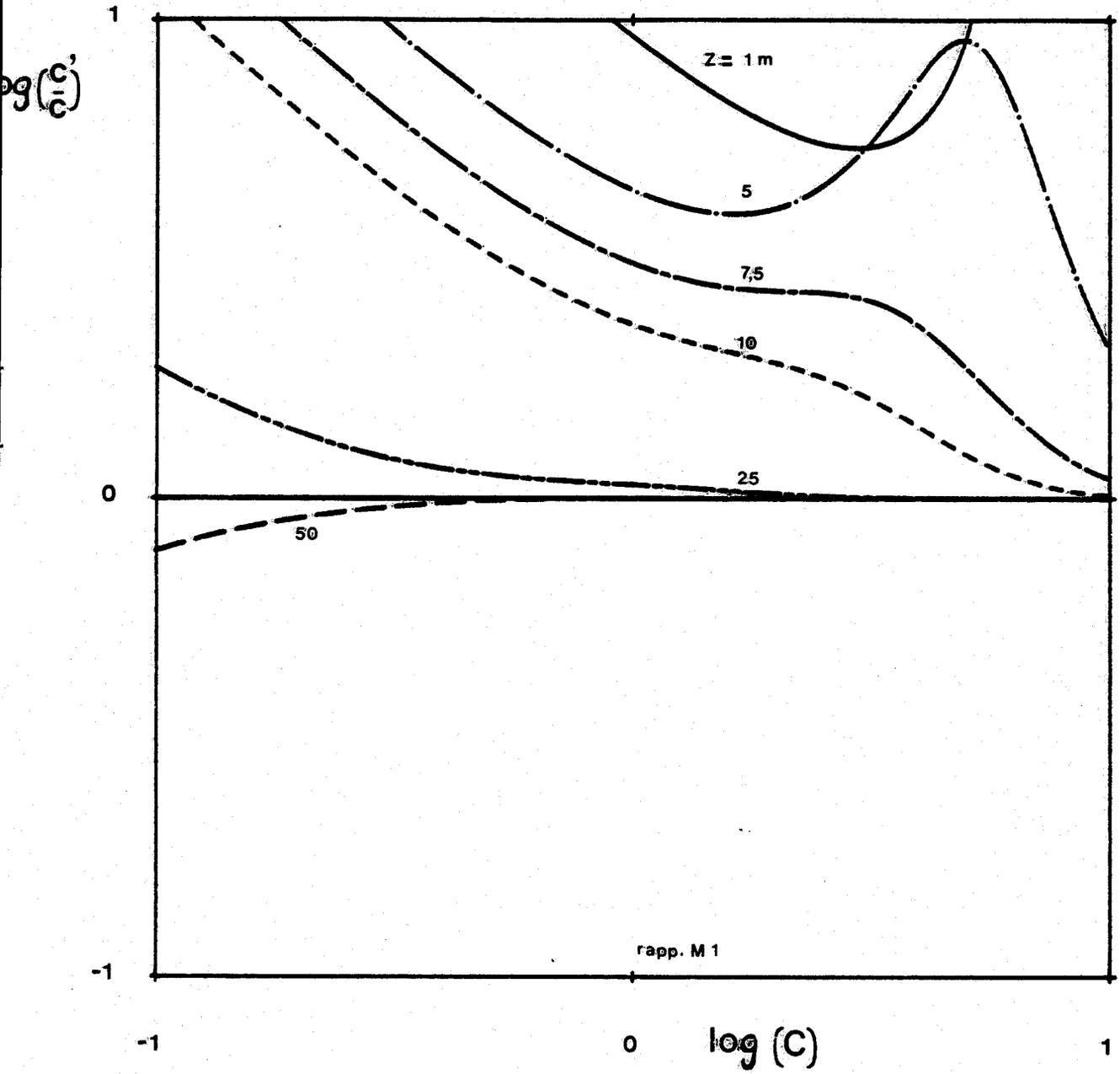


Figure II-7b - Meme légende qu'en figure II-5a, en utilisant l'algorithme rapport M1.



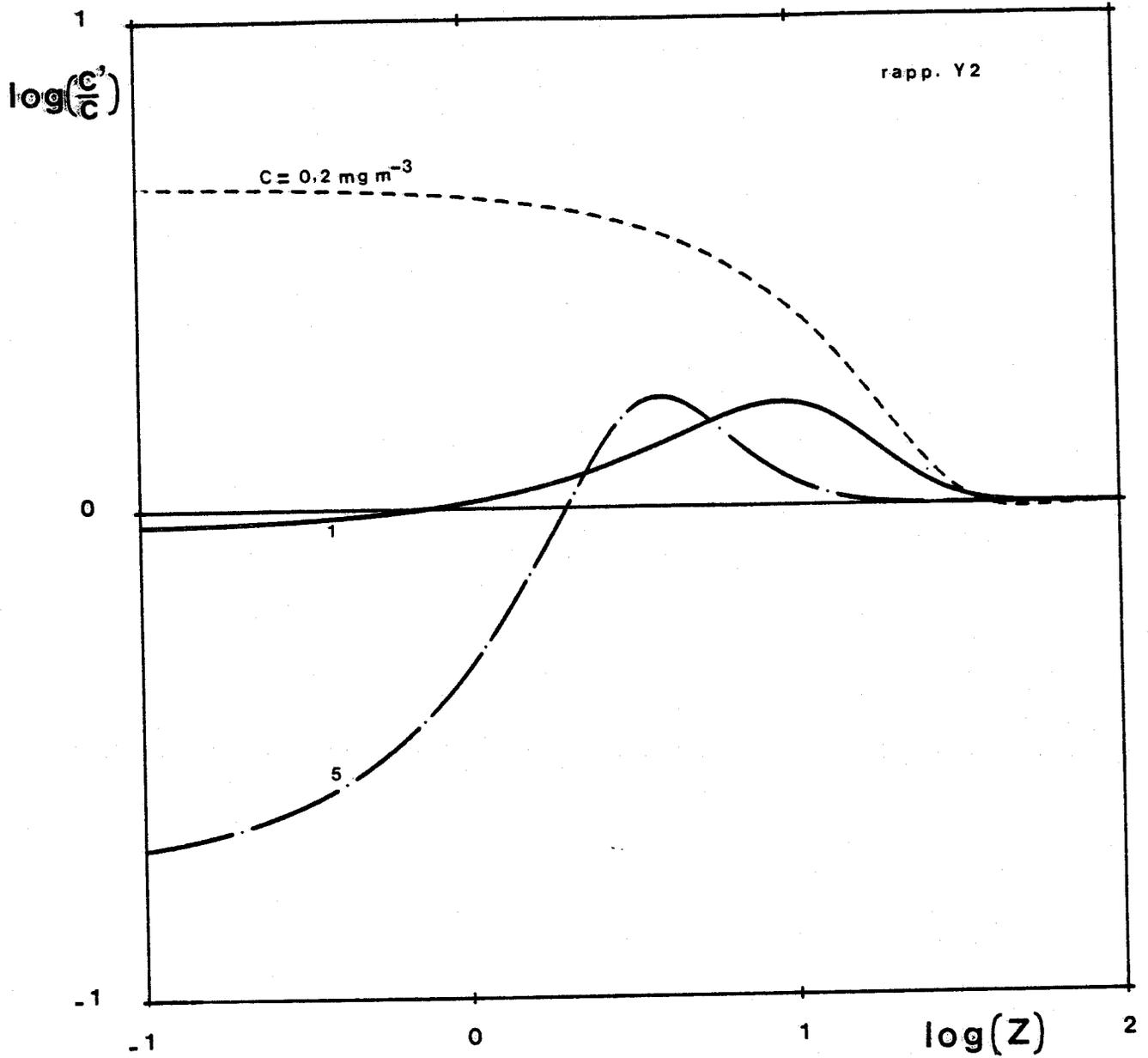


Figure II-8a - Meme l'egende qu'en figure II-6a, en utilisant la rapport A_{520}/A_{443} et le modele d'absorption-diffusion Y2.



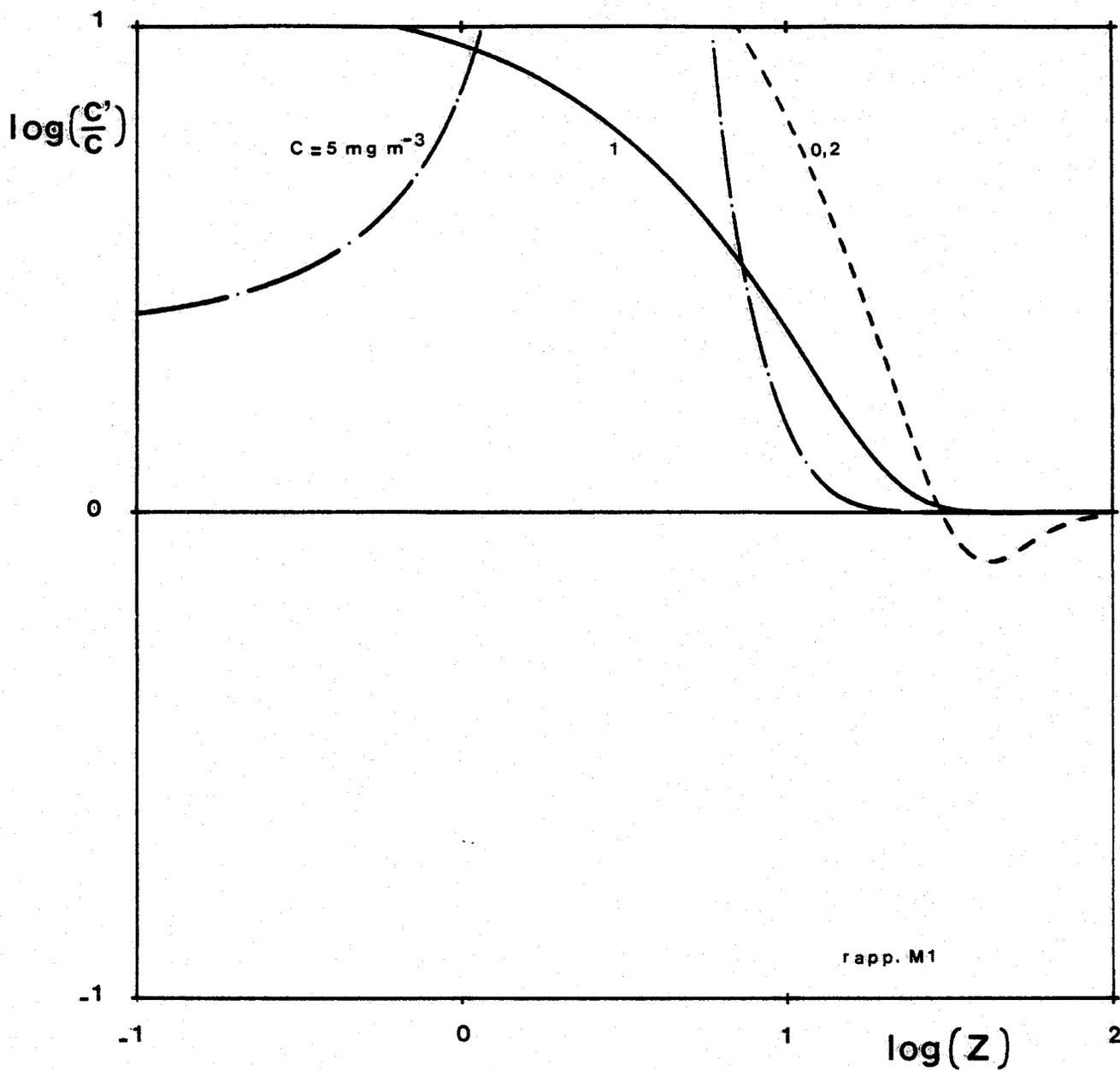


Figure II-8b - Meme légende qu'en figure II-6a, en utilisant le rapport A_{520}/A_{443} et le modèle d'absorption-diffusion M1.



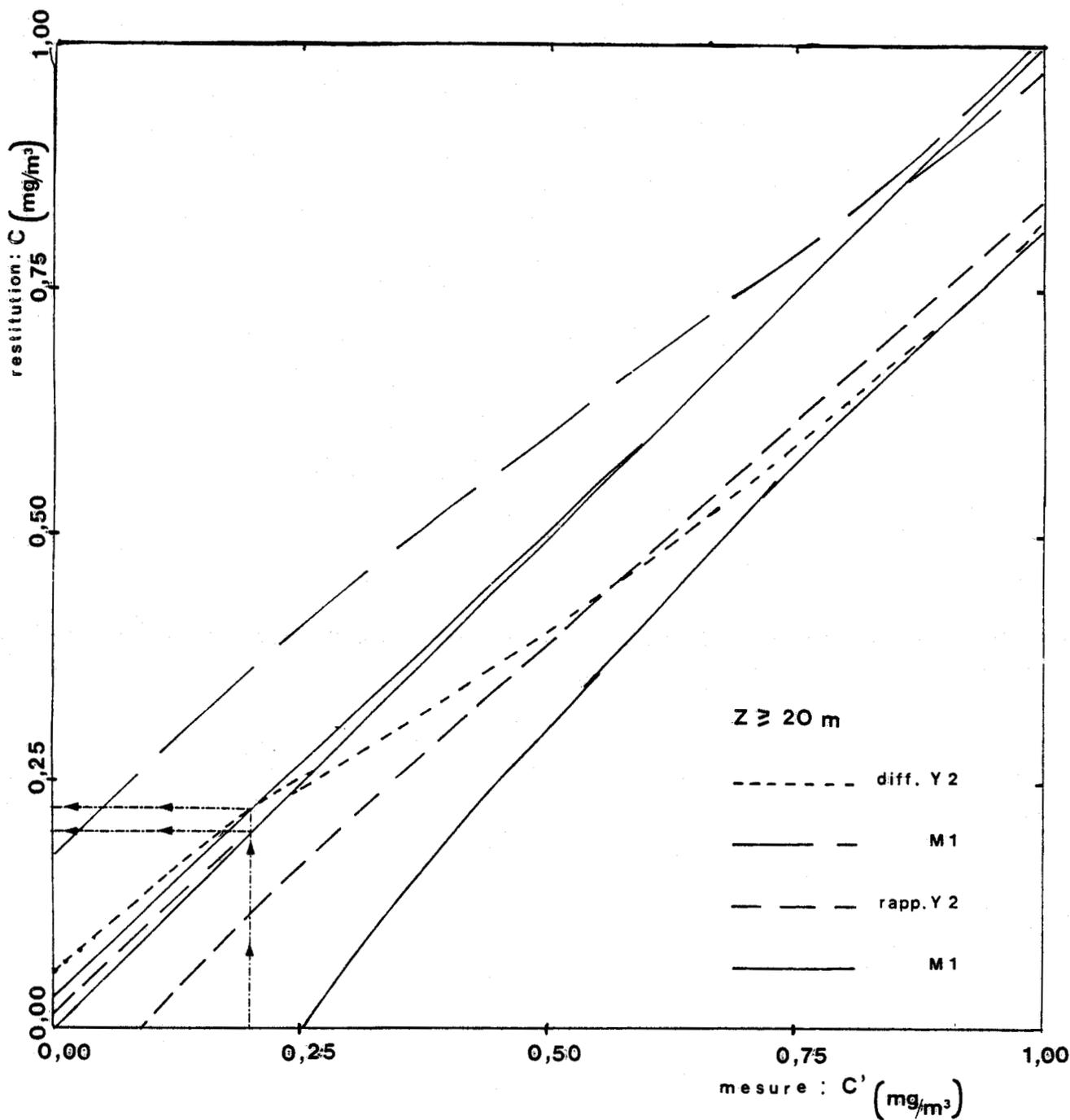


Figure II-9 - Ce schéma donne la marge d'incertitude sur la valeur restituée (C) de la concentration en chlorophylle, dans le cas où le problème de l'influence du fond se pose le plus fréquemment : eaux littorales claires ($C < 1 \text{ mg/m}^3$) peu profondes, mais dont on sait que la profondeur est au moins supérieure à 20 mètres.



Nous savons que pour les plus grandes profondeurs on commet une sous-évaluation de C pour ce type d'eau. Au voisinage de 20 m, on commet au contraire dans la plupart des cas une surestimation de C.

suite de la Figure II-9 - Cette figure, résumant ces deux effets, permet d'associer à une mesure de C' , un intervalle de valeurs dans lequel le contenu exact en pigments chlorophylliens C se trouve.

L'exemple suivant, en traits mixtes fléchés, nous montre l'utilisation de ces courbes :

En utilisant l'algorithme différence Y2 on a mesuré $C' \approx 0,20 \text{ mg.m}^{-3}$, dans le cas présent on a $C' < C$ donc $0,20 \leq C \leq 0,23 \text{ mg.m}^{-3}$.

Si l'utilisation de l'algorithme rapport M1 avait donné une même mesure $C' \approx 0,20 \text{ mg.m}^{-3}$, on aurait $0,00 \leq C \leq 0,23 \text{ mg.m}^{-3}$.

On retrouve sur cette figure, que l'utilisation des rapports donne de meilleurs résultats que l'utilisation des différences, lorsque l'eau est peu chargée en pigments chlorophylliens.

NOM	B5	B3	B2
$b_p^{(m-1)}$	0,05	0,10	0,20
$b^{(m-1)}$	0,05454	0,10454	0,20454
B	0,05214	0,03255	0,02210
$B_b^{(m-1)}$	0,00284	0,00340	0,00452
A	1,2900	1,3320	1,3543
β_1	1,9308	2,2050	2,3673
b_o/b_p	0,0908	0,0454	0,0227

Tableau I-1

Caractéristiques des trois fonctions de phase utilisées. La longueur d'onde est voisine de 450 nanomètres (valeur de b_o publiée par MOREL (39)). On a $B_p \approx 0,012$ (8). A est le coefficient de troncature de la fonction de phase (41, 47). β_1 le premier terme du développement de la fonction de phase en polynômes de LEGENDRE. Il définit le coefficient d'asymétrie $g = \beta_1/3$ (41). Le rapport b_o/b_p traduit le caractère moléculaire ou particulaire de la fonction de phase (43).



ω_0	B2	B3	B5
0,20	0,1793	0,2661	0,4261
0,50	0,7130	1,0463	1,6525
0,60	1,0640	1,5523	2,4329
0,70	1,6365	2,3625	3,6787
0,75	2,0964	3,0138	4,6116
0,80	2,7732	3,9483	5,9657
0,85	3,8704	5,4290	8,0456
0,90	5,9642	8,2089	11,6970
0,95	11,4460	14,8670	19,8290

Tableau I-2 - Expression en % de la valeur des albédos A^- d'un milieu semi-infini sans interface air/eau en fonction de ω_0 et de la fonction de phase.

ω_0	B2	B3	B5
0,20	0,0980	0,1438	0,2287
0,50	0,3880	0,5650	0,8889
0,60	0,5772	0,8384	1,3106
0,70	0,8891	1,2836	1,9866
0,75	1,1354	1,6315	2,5065
0,80	1,5004	2,1409	3,2553
0,85	2,0990	2,9621	4,4346
0,90	3,2639	4,5151	6,5808
0,95	6,4956	8,5805	11,8246

Tableau I-3 - Même chose que I-2 pour l'albédo A^+ calculé en présence de l'interface.



LEGENDE DES TABLEAUX I-4, 5, 6

Les tableaux I-4, 5, 6 se rapportent respectivement aux fonctions de phase notées B2, B3 et B5 (cf. tableau I-1). Chacun de ces tableaux est constitué de neuf pages, chacune relative à une valeur différente de ω_0 : 0,20 ; 0,50 ; 0,60 ; 0,70 ; 0,75 ; 0,80 ; 0,85 ; 0,90 et 0,95.

Chaque page est divisée en trois panneaux de 5 colonnes chacun. La première colonne nous donne les épaisseurs optiques τ_i utilisées.

Le premier panneau résume les valeurs des albédos calculés par les H.S dans le cas du fond noir ($R_0 = 0,00$, 2ème colonne), ou le cas d'un fond lambertien ($R_0 = 0,10, 0,20, 0,25$; 3ème, 4ème et 5ème colonne).

Les second et troisième panneaux sont relatifs à l'étude des variations de $\frac{K}{c}$ avec τ : pour une couche $(0, \tau_i)$ (2ème panneau) et une couche finie (τ_{i-1}, τ_i) (3ème panneau). En dernière ligne est donnée la valeur moyenne $\langle K/c \rangle$ obtenue à travers l'équation I-24.

Dans les cas du fond lambertien (colonnes 3, 4, 5), on suppose que l'albédo varie linéairement avec ρ (équation I-28). On remarquera de ce fait que $\langle K/c \rangle$ est légèrement fonction de ρ .

Les valeurs pour lesquelles la précision des calculs n'est pas suffisante, ne sont pas représentées.



Tableau 1-4a

Fonction B2 $P_{10} = 0.20$

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.0866	5.2474	10.4099	12.9919
0.5	0.1173	3.5340	6.9518	8.6612
0.8	0.1450	2.0222	3.9000	4.8396
1.0	0.1556	1.4275	2.6982	3.3341
1.2	0.1635	1.0285	1.8938	2.3262
1.5	0.1701	0.6600	1.1496	1.3947
2.0	0.1755	0.3685	0.5612	0.6569
2.5	0.1780	0.2544	0.3319	0.3702
3.0	0.1787	0.2094	0.2405	0.2558
3.5	0.1791	0.1919	0.2043	0.2104
4.0	0.1791	0.1844	0.1894	0.1923
5.0	0.1791	0.1802	0.1810	0.1816
7.5	0.1793	0.1793	0.1793	0.1793
10.0	0.1793	0.1793	0.1793	0.1793
15.0	0.1793	0.1793	0.1793	0.1793
17.0	0.1793	0.1793	0.1793	0.1793
20.0	0.1793	0.1793	0.1793	0.1793
50.0	0.1793			

$(K/c)=f(\text{Tau})$ calculée sur la couche $\text{Tau}=0/\text{Tau}(i)$

0.3	1.0995	1.1025	1.1022	1.1021
0.5	1.0621	1.0739	1.0737	1.0737
0.8	1.0331	1.0455	1.0454	1.0453
1.0	1.0129	1.0311	1.0313	1.0312
1.2	1.0113	1.0198	1.0197	1.0198
1.5	0.9917	1.0054	1.0055	1.0054
2.0	0.9628	0.9869	0.9871	0.9875
2.5	0.9805	0.9746	0.9734	0.9736
3.0	0.9589	0.9643	0.9633	0.9637
3.5	0.9806	0.9518	0.9539	0.9548
4.0				
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

$(K/c)=f(\text{Tau})$ calculée sur la couche $\text{Tau}(i-1)/\text{Tau}(i)$

0.3	1.0995	1.1025	1.1022	1.1021
0.5	1.0060	1.0311	1.0310	1.0311
0.8	0.9849	0.9981	0.9981	0.9980
1.0	0.9318	0.9734	0.9749	0.9751
1.2	1.0038	0.9637	0.9621	0.9625
1.5	0.9130	0.9478	0.9485	0.9481
2.0	0.8760	0.9312	0.9320	0.9336
2.5	1.0515	0.9257	0.9185	0.9179
3.0	0.8508	0.9126	0.9126	0.9143
3.5	1.1110	0.8767	0.8979	0.9015
4.0				
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

$(K/c)=$ 0.998 1.012 1.012 1.012



Tableau I-4b

Fonction B2 $F_{10} = 0.50$

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.2488	6.7351	13.2306	16.4816
0.5	0.3579	5.2972	10.2446	12.7219
0.8	0.4731	3.7924	7.1191	8.7852
1.0	0.5271	3.0878	5.6547	6.9403
1.2	0.5682	2.5504	4.5371	5.5319
1.5	0.6133	1.9694	3.3284	4.0094
2.0	0.6588	1.3857	2.1148	2.4799
2.5	0.6835	1.0764	1.4705	1.6682
3.0	0.6966	0.9107	1.1253	1.2328
3.5	0.7038	0.8209	0.9384	0.9967
4.0	0.7077	0.7722	0.8367	0.8688
5.0	0.7113	0.7310	0.7506	0.7602
7.5	0.7128	0.7137	0.7149	0.7153
10.0	0.7130	0.7130	0.7130	0.7130
15.0	0.7130	0.7130	0.7130	0.7130
17.0	0.7130	0.7130	0.7130	0.7130
20.0	0.7130	0.7130	0.7130	0.7130
50.0	0.7130	0.7130	0.7130	0.7130

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.7154	0.7215	0.7203	0.7197
0.5	0.6970	0.7054	0.7045	0.7041
0.8	0.6807	0.6893	0.6886	0.6882
1.0	0.6722	0.6812	0.6805	0.6803
1.2	0.6645	0.6743	0.6739	0.6736
1.5	0.6560	0.6660	0.6656	0.6654
2.0	0.6446	0.6554	0.6550	0.6549
2.5	0.6370	0.6473	0.6470	0.6469
3.0	0.6295	0.6407	0.6405	0.6404
3.5	0.6219	0.6353	0.6351	0.6353
4.0	0.6128	0.6305	0.6304	0.6306
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.7154	0.7215	0.7203	0.7197
0.5	0.6694	0.6811	0.6809	0.6806
0.8	0.6536	0.6625	0.6620	0.6618
1.0	0.6380	0.6487	0.6484	0.6484
1.2	0.6257	0.6403	0.6404	0.6405
1.5	0.6220	0.6326	0.6328	0.6325
2.0	0.6105	0.6236	0.6232	0.6232
2.5	0.6068	0.6150	0.6151	0.6148
3.0	0.5917	0.6075	0.6076	0.6079
3.5	0.5767	0.6033	0.6028	0.6047
4.0	0.5491	0.5962	0.5978	0.5976
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.652 0.663 0.662 0.662



Tableau I-4c

Fonction B2 $P_{i0} = 0.60$

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.3139	7.3261	14.3506	17.8679
0.5	0.4621	6.0646	11.6806	14.4935
0.8	0.6279	4.6648	8.7131	10.7418
1.0	0.7106	3.9685	7.2367	8.8749
1.2	0.7772	3.4131	6.0576	7.3830
1.5	0.8533	2.7785	4.7106	5.6791
2.0	0.9374	2.0861	3.2394	3.8175
2.5	0.9872	1.6778	2.3702	2.7179
3.0	1.0173	1.4339	1.8522	2.0621
3.5	1.0355	1.2880	1.5414	1.6686
4.0	1.0467	1.1997	1.3541	1.4310
5.0	1.0574	1.1145	1.1713	1.2003
7.5	1.0633	1.0681	1.0729	1.0757
10.0	1.0638	1.0642	1.0646	1.0650
15.0	1.0640	1.0640	1.0640	1.0640
17.0	1.0640	1.0640	1.0640	1.0640
20.0	1.0640	1.0640	1.0640	1.0640
50.0	1.0640			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche $Tau=0/Tau(i)$

0.3	0.5826	0.5916	0.5901	0.5893
0.5	0.5696	0.5794	0.5782	0.5776
0.8	0.5575	0.5670	0.5661	0.5656
1.0	0.5510	0.5607	0.5600	0.5596
1.2	0.5463	0.5556	0.5549	0.5546
1.5	0.5398	0.5492	0.5486	0.5483
2.0	0.5321	0.5410	0.5405	0.5403
2.5	0.5258	0.5346	0.5343	0.5341
3.0	0.5211	0.5297	0.5294	0.5292
3.5	0.5169	0.5255	0.5253	0.5251
4.0	0.5149	0.5225	0.5219	0.5219
5.0	0.5081	0.5166	0.5168	0.5165
7.5		0.5092	0.5093	0.5071
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche $Tau(i-1)/Tau(i)$

0.3	0.5826	0.5916	0.5901	0.5893
0.5	0.5502	0.5611	0.5603	0.5600
0.8	0.5372	0.5463	0.5459	0.5456
1.0	0.5253	0.5359	0.5355	0.5353
1.2	0.5225	0.5297	0.5296	0.5296
1.5	0.5138	0.5237	0.5234	0.5233
2.0	0.5091	0.5164	0.5162	0.5161
2.5	0.5007	0.5089	0.5095	0.5094
3.0	0.4971	0.5053	0.5046	0.5047
3.5	0.4921	0.5006	0.5010	0.5008
4.0	0.5005	0.5013	0.4982	0.4992
5.0	0.4813	0.4929	0.4964	0.4947
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.532 0.542 0.541 0.541



Tableau I-4d

Fonction B2 $P_{10} = 0.70$

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.3853	7.9735	15.5794	19.3893
0.5	0.5816	6.9491	13.3384	16.5405
0.8	0.8144	5.7421	10.6895	13.1700
1.0	0.9398	5.1043	9.2875	11.3857
1.2	1.0443	4.5715	8.1136	9.8916
1.5	1.1719	3.9263	6.6949	8.0847
2.0	1.3254	3.1597	5.0047	5.9308
2.5	1.4267	2.6547	3.8895	4.5096
3.0	1.4948	2.3197	3.1491	3.5654
3.5	1.5410	2.0962	2.6539	2.9349
4.0	1.5719	1.9465	2.3230	2.5129
5.0	1.6072	1.7782	1.9499	2.0363
7.5	1.6323	1.6567	1.6813	1.6937
10.0	1.6360	1.6398	1.6432	1.6449
15.0	1.6365	1.6367	1.6367	1.6367
17.0	1.6365	1.6367	1.6367	1.6367
20.0	1.6365	1.6367	1.6367	1.6367
50.0	1.6365			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.4474	0.4600	0.4580	0.4570
0.5	0.4391	0.4514	0.4497	0.4480
0.8	0.4303	0.4423	0.4411	0.4405
1.0	0.4270	0.4380	0.4369	0.4363
1.2	0.4235	0.4342	0.4333	0.4328
1.5	0.4197	0.4298	0.4289	0.4285
2.0	0.4151	0.4240	0.4233	0.4229
2.5	0.4108	0.4194	0.4189	0.4186
3.0	0.4078	0.4158	0.4154	0.4152
3.5	0.4058	0.4130	0.4127	0.4124
4.0	0.4039	0.4106	0.4102	0.4100
5.0	0.4021	0.4068	0.4066	0.4065
7.5	0.3981	0.4010	0.4008	0.4006
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.4474	0.4600	0.4580	0.4570
0.5	0.4266	0.4385	0.4371	0.4366
0.8	0.4157	0.4272	0.4268	0.4265
1.0	0.4135	0.4206	0.4200	0.4197
1.2	0.4064	0.4152	0.4156	0.4152
1.5	0.4044	0.4122	0.4114	0.4112
2.0	0.4012	0.4065	0.4062	0.4062
2.5	0.3939	0.4013	0.4014	0.4014
3.0	0.3924	0.3978	0.3979	0.3980
3.5	0.3940	0.3959	0.3963	0.3958
4.0	0.3907	0.3935	0.3932	0.3928
5.0	0.3948	0.3919	0.3923	0.3926
7.5	0.3902	0.3894	0.3890	0.3888
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.411 0.420 0.419 0.418



Tableau I-4e

Fonction B2 $Pi_0 = 0.75$

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.4257	9.3237	16.2422	20.2096
0.5	0.6523	7.4475	14.2690	17.6891
0.8	0.9298	6.3830	11.8613	14.6105
1.0	1.0832	5.8020	10.5462	12.9283
1.2	1.2152	5.3052	9.4188	11.4843
1.5	1.3804	4.6879	8.0153	9.6866
2.0	1.5883	3.9193	6.2661	7.4445
2.5	1.7348	3.3835	5.0442	5.8785
3.0	1.8393	3.0085	4.1863	4.7783
3.5	1.9123	2.7438	3.5803	4.0015
4.0	1.9655	2.5566	3.1519	3.4520
5.0	2.0293	2.3299	2.6320	2.7842
7.5	2.0842	2.1397	2.1961	2.2244
10.0	2.0941	2.1046	2.1151	2.1204
15.0	2.0962	2.0966	2.0972	2.0973
17.0	2.0962	2.0964	2.0964	2.0966
20.0	2.0964	2.0964	2.0964	2.0964
50.0	2.0964			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.3783	0.3933	0.3911	0.3900
0.5	0.3727	0.3864	0.3844	0.3835
0.8	0.3664	0.3790	0.3776	0.3768
1.0	0.3636	0.3755	0.3742	0.3735
1.2	0.3611	0.3725	0.3713	0.3707
1.5	0.3581	0.3688	0.3678	0.3673
2.0	0.3543	0.3641	0.3632	0.3628
2.5	0.3515	0.3605	0.3598	0.3595
3.0	0.3497	0.3577	0.3571	0.3568
3.5	0.3475	0.3553	0.3549	0.3546
4.0	0.3467	0.3535	0.3531	0.3528
5.0	0.3441	0.3505	0.3502	0.3500
7.5	0.3430	0.3463	0.3457	0.3456
10.0	0.3409	0.3430	0.3430	0.3428
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.3783	0.3933	0.3911	0.3900
0.5	0.3644	0.3760	0.3744	0.3737
0.8	0.3557	0.3667	0.3661	0.3657
1.0	0.3523	0.3616	0.3606	0.3602
1.2	0.3489	0.3576	0.3570	0.3569
1.5	0.3460	0.3539	0.3537	0.3536
2.0	0.3430	0.3499	0.3495	0.3495
2.5	0.3401	0.3463	0.3460	0.3459
3.0	0.3411	0.3437	0.3436	0.3435
3.5	0.3343	0.3410	0.3415	0.3413
4.0	0.3412	0.3412	0.3407	0.3404
5.0	0.3336	0.3381	0.3386	0.3387
7.5	0.3408	0.3379	0.3367	0.3367
10.0	0.3345	0.3333	0.3349	0.3346
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.349 0.358 0.357 0.357



Fonction B2 $P_{10} = 0.80$

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.4688	8.6906	16.9384	21.0717
0.5	0.7282	7.9850	15.2736	18.9299
0.8	1.0596	7.1002	13.1767	16.2281
1.0	1.2470	6.6032	11.9947	14.7033
1.2	1.4134	6.1679	10.9555	13.3615
1.5	1.6288	5.6109	9.6231	11.6406
2.0	1.9127	4.8850	7.8832	9.3910
2.5	2.1248	4.3499	6.5955	7.7254
3.0	2.2844	3.9536	5.6383	6.4861
3.5	2.4044	3.6582	4.9235	5.5608
4.0	2.4951	3.4377	4.3891	4.8682
5.0	2.6147	3.1483	3.6873	3.9587
7.5	2.7344	2.8638	2.9946	3.0605
10.0	2.7637	2.7952	2.8269	2.8429
15.0	2.7727	2.7744	2.7761	2.7771
17.0	2.7730	2.7734	2.7740	2.7744
20.0	2.7732	2.7732	2.7740	2.7744
50.0	2.7732	2.7732	2.7732	2.7734

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.3087	0.3263	0.3237	0.3224
0.5	0.3046	0.3206	0.3185	0.3174
0.8	0.3005	0.3149	0.3131	0.3122
1.0	0.2986	0.3122	0.3105	0.3097
1.2	0.2969	0.3098	0.3083	0.3076
1.5	0.2950	0.3069	0.3057	0.3050
2.0	0.2925	0.3033	0.3022	0.3017
2.5	0.2907	0.3006	0.2996	0.2992
3.0	0.2893	0.2984	0.2976	0.2972
3.5	0.2882	0.2966	0.2960	0.2956
4.0	0.2875	0.2952	0.2946	0.2943
5.0	0.2862	0.2931	0.2926	0.2923
7.5	0.2846	0.2898	0.2895	0.2893
10.0	0.2840	0.2881	0.2879	0.2877
15.0	0.2852	0.2889	0.2886	0.2880
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.3087	0.3263	0.3237	0.3224
0.5	0.2986	0.3121	0.3106	0.3098
0.8	0.2937	0.3054	0.3043	0.3037
1.0	0.2910	0.3011	0.3000	0.2996
1.2	0.2885	0.2979	0.2974	0.2972
1.5	0.2875	0.2955	0.2950	0.2947
2.0	0.2851	0.2924	0.2919	0.2918
2.5	0.2831	0.2896	0.2893	0.2891
3.0	0.2824	0.2874	0.2874	0.2874
3.5	0.2818	0.2863	0.2863	0.2861
4.0	0.2823	0.2853	0.2852	0.2853
5.0	0.2810	0.2844	0.2843	0.2842
7.5	0.2814	0.2834	0.2833	0.2832
10.0	0.2822	0.2829	0.2831	0.2831
15.0	0.2877	0.2905	0.2901	0.2884
17.0				
20.0				

(K/c)=

0.287

0.296

0.295

0.295



Tableau I-4g

Fonction B2

PIe= 0.85

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.5140	9.0781	17.6719	21.9803
0.5	0.8110	8.5677	16.3636	20.2760
0.8	1.2035	7.9106	14.6615	18.0549
1.0	1.4355	7.5305	13.6714	16.7594
1.2	1.6464	7.1894	12.7792	15.5915
1.5	1.9278	6.7416	11.5993	14.0456
2.0	2.3188	6.1318	9.9841	11.9252
2.5	2.6306	5.6567	8.7157	10.2582
3.0	2.8794	5.2836	7.7153	8.9419
3.5	3.0779	4.9897	6.9245	7.9010
4.0	3.2372	4.7579	6.2977	7.0748
5.0	3.4655	4.4296	5.4056	5.8982
7.5	3.7394	4.0474	4.3597	4.5172
10.0	3.8281	3.9259	4.0257	4.0760
15.0	3.8658	3.8758	3.8859	3.8908
17.0	3.8687	3.8727	3.8762	3.8786
20.0	3.8700	3.8708	3.8718	3.8723
50.0	3.8704			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.2375	0.2584	0.2555	0.2540
0.5	0.2351	0.2540	0.2515	0.2503
0.8	0.2328	0.2496	0.2476	0.2465
1.0	0.2317	0.2476	0.2457	0.2447
1.2	0.2309	0.2459	0.2441	0.2432
1.5	0.2298	0.2437	0.2422	0.2414
2.0	0.2285	0.2410	0.2398	0.2391
2.5	0.2277	0.2391	0.2380	0.2374
3.0	0.2271	0.2376	0.2366	0.2361
3.5	0.2266	0.2364	0.2355	0.2351
4.0	0.2263	0.2354	0.2346	0.2343
5.0	0.2257	0.2339	0.2333	0.2330
7.5	0.2257	0.2320	0.2316	0.2313
10.0	0.2258	0.2313	0.2309	0.2307
15.0	0.2248	0.2305	0.2302	0.2303
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.2375	0.2584	0.2555	0.2540
0.5	0.2316	0.2476	0.2456	0.2447
0.8	0.2289	0.2423	0.2411	0.2403
1.0	0.2275	0.2392	0.2380	0.2375
1.2	0.2266	0.2373	0.2362	0.2357
1.5	0.2254	0.2351	0.2345	0.2341
2.0	0.2247	0.2331	0.2325	0.2322
2.5	0.2244	0.2312	0.2309	0.2307
3.0	0.2239	0.2300	0.2298	0.2296
3.5	0.2236	0.2292	0.2289	0.2287
4.0	0.2243	0.2288	0.2286	0.2286
5.0	0.2236	0.2279	0.2279	0.2279
7.5	0.2257	0.2282	0.2281	0.2280
10.0	0.2260	0.2293	0.2298	0.2287
15.0	0.2229	0.2289	0.2289	0.2295
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.224 0.234 0.233 0.232



Tableau I-4h

Fonction R2

Pie= 0.90

Tau	R0=0.00	R0=0.10	R0=0.20	R0=0.25
0.3	0.5632	9.4874	18.4467	22.9396
0.5	0.9035	9.2026	17.5497	21.7414
0.8	1.3722	8.8308	16.3493	20.1309
1.0	1.6600	8.6124	15.6291	19.1618
1.2	1.9294	8.4136	14.9645	18.2654
1.5	2.3023	8.1469	14.0595	17.0417
2.0	2.8488	7.7712	12.7600	15.2795
2.5	3.3148	7.4653	11.6772	13.8063
3.0	3.7120	7.2137	10.7708	12.5707
3.5	4.0507	7.0059	10.0105	11.5320
4.0	4.3391	6.8340	9.3720	10.6576
5.0	4.7943	6.5720	8.3824	9.3000
7.5	5.4545	6.2147	6.9894	7.3826
10.0	5.7448	6.0678	6.3973	6.5645
15.0	5.9246	5.9820	6.0403	6.0700
17.0	5.9445	5.9730	6.0020	6.0167
20.0	5.9572	5.9672	5.9774	5.9826
50.0	5.9642			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.1653	0.1897	0.1864	0.1848
0.5	0.1643	0.1864	0.1836	0.1821
0.8	0.1634	0.1833	0.1808	0.1795
1.0	0.1631	0.1817	0.1794	0.1783
1.2	0.1628	0.1805	0.1784	0.1773
1.5	0.1626	0.1790	0.1771	0.1761
2.0	0.1624	0.1772	0.1755	0.1747
2.5	0.1623	0.1759	0.1744	0.1737
3.0	0.1623	0.1749	0.1736	0.1729
3.5	0.1624	0.1741	0.1730	0.1724
4.0	0.1625	0.1735	0.1725	0.1719
5.0	0.1629	0.1727	0.1718	0.1714
7.5	0.1640	0.1718	0.1712	0.1708
10.0	0.1651	0.1716	0.1711	0.1709
15.0	0.1671	0.1720	0.1717	0.1716
17.0	0.1680	0.1723	0.1721	0.1719
20.0	0.1687	0.1726	0.1725	0.1723

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.1653	0.1897	0.1864	0.1848
0.5	0.1627	0.1816	0.1793	0.1781
0.8	0.1620	0.1779	0.1761	0.1752
1.0	0.1618	0.1757	0.1742	0.1734
1.2	0.1616	0.1743	0.1730	0.1723
1.5	0.1616	0.1731	0.1720	0.1714
2.0	0.1616	0.1717	0.1708	0.1704
2.5	0.1620	0.1706	0.1699	0.1696
3.0	0.1624	0.1700	0.1695	0.1692
3.5	0.1630	0.1697	0.1692	0.1690
4.0	0.1634	0.1693	0.1691	0.1689
5.0	0.1643	0.1694	0.1692	0.1691
7.5	0.1662	0.1699	0.1698	0.1698
10.0	0.1686	0.1712	0.1711	0.1711
15.0	0.1711	0.1728	0.1729	0.1729
17.0	0.1743	0.1746	0.1747	0.1748
20.0	0.1729	0.1742	0.1746	0.1746

(K/c)= 0.160 0.171 0.169 0.169



Fonction R2

Fio= 0.95

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.6135	9.9175	19.2632	23.9517
0.5	1.0035	9.8924	18.8415	23.3388
0.8	1.5645	9.8786	18.2735	22.5015
1.0	1.9236	9.8806	17.9284	21.9868
1.2	2.2709	9.8891	17.6058	21.5017
1.5	2.7710	9.9112	17.1585	20.8231
2.0	3.5507	9.9659	16.4960	19.8052
2.5	4.2672	10.0347	15.9196	18.9072
3.0	4.9247	10.1117	15.4149	18.1113
3.5	5.5273	10.1928	14.9710	17.4036
4.0	6.0789	10.2753	14.5794	16.7730
5.0	7.0436	10.4373	13.9263	15.7078
7.5	8.7972	10.7856	12.8373	13.8880
10.0	9.8762	11.0333	12.2296	12.8431
15.0	10.9123	11.2970	11.6955	11.9000
17.0	11.1024	11.3487	11.6039	11.7349
20.0	11.2696	11.3953	11.5254	11.5923
50.0	11.4460			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.0918	0.1202	0.1165	0.1146
0.5	0.0918	0.1178	0.1144	0.1127
0.8	0.0919	0.1154	0.1124	0.1108
1.0	0.0920	0.1143	0.1114	0.1100
1.2	0.0921	0.1134	0.1107	0.1093
1.5	0.0924	0.1123	0.1098	0.1085
2.0	0.0928	0.1110	0.1088	0.1076
2.5	0.0933	0.1101	0.1080	0.1070
3.0	0.0938	0.1094	0.1075	0.1066
3.5	0.0942	0.1089	0.1072	0.1063
4.0	0.0947	0.1085	0.1070	0.1061
5.0	0.0955	0.1081	0.1067	0.1060
7.5	0.0976	0.1077	0.1066	0.1061
10.0	0.0993	0.1078	0.1070	0.1066
15.0	0.1022	0.1086	0.1080	0.1077
17.0	0.1031	0.1089	0.1084	0.1081
20.0	0.1043	0.1094	0.1090	0.1087

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.0918	0.1202	0.1165	0.1146
0.5	0.0917	0.1141	0.1113	0.1098
0.8	0.0920	0.1114	0.1090	0.1078
1.0	0.0925	0.1098	0.1076	0.1066
1.2	0.0929	0.1088	0.1069	0.1059
1.5	0.0934	0.1080	0.1063	0.1054
2.0	0.0942	0.1071	0.1056	0.1049
2.5	0.0951	0.1064	0.1052	0.1046
3.0	0.0961	0.1061	0.1051	0.1046
3.5	0.0970	0.1060	0.1051	0.1047
4.0	0.0978	0.1060	0.1052	0.1048
5.0	0.0991	0.1061	0.1056	0.1052
7.5	0.1016	0.1069	0.1065	0.1064
10.0	0.1046	0.1083	0.1081	0.1080
15.0	0.1079	0.1101	0.1100	0.1100
17.0	0.1101	0.1114	0.1114	0.1114
20.0	0.1111	0.1121	0.1122	0.1122

(K/c)= 0.094 0.104 0.103 0.103



Tableau I-5a

Fonction B3

P10= 0.20

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.1287	5.2804	10.4356	13.0132
0.5	0.1753	3.5815	6.9897	8.6953
0.8	0.2155	2.0844	3.9536	4.8892
1.0	0.2316	1.4952	2.7596	3.3917
1.2	0.2426	1.1017	1.9606	2.3911
1.5	0.2527	0.7382	1.2232	1.4664
2.0	0.2609	0.4505	0.6415	0.7364
2.5	0.2640	0.3393	0.4152	0.4530
3.0	0.2651	0.2956	0.3260	0.3412
3.5	0.2661	0.2781	0.2903	0.2964
4.0	0.2661	0.2710	0.2758	0.2785
5.0	0.2661	0.2672	0.2676	0.2678
7.5	0.2661	0.2661	0.2661	0.2661
10.0	0.2661	0.2661	0.2661	0.2661
15.0	0.2661	0.2661	0.2661	0.2661
17.0	0.2661	0.2661	0.2661	0.2661
20.0	0.2661	0.2661	0.2661	0.2661
50.0	0.2661			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	1.1023	1.1055	1.1049	1.1048
0.5	1.0752	1.0770	1.0767	1.0765
0.8	1.0381	1.0483	1.0482	1.0481
1.0	1.0211	1.0343	1.0341	1.0341
1.2	1.0119	1.0227	1.0227	1.0226
1.5	0.9974	1.0084	1.0086	1.0084
2.0	0.9862	0.9914	0.9905	0.9906
2.5	0.9685	0.9777	0.9769	0.9770
3.0	0.9384	0.9653	0.9659	0.9658
3.5				
4.0				
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	1.1023	1.1055	1.1049	1.1048
0.5	1.0346	1.0343	1.0344	1.0340
0.8	0.9761	1.0005	1.0008	1.0008
1.0	0.9531	0.9783	0.9778	0.9783
1.2	0.9658	0.9647	0.9657	0.9647
1.5	0.9394	0.9514	0.9519	0.9518
2.0	0.9526	0.9401	0.9362	0.9370
2.5	0.8977	0.9229	0.9226	0.9225
3.0	0.7880	0.9037	0.9106	0.9098
3.5				
4.0				
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 1.009 1.015 1.015 1.014



Tableau I-5b

Fonction R3 $Pi_0 = 0.50$

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.3678	6.8272	13.2984	16.5378
0.5	0.5291	5.4337	10.3494	12.8115
0.8	0.6983	3.9808	7.2720	8.9208
1.0	0.7782	3.3024	5.8344	7.1031
1.2	0.8386	2.7864	4.7405	5.7198
1.5	0.9043	2.2309	3.5615	4.2285
2.0	0.9701	1.6757	2.3838	2.7388
2.5	1.0051	1.3836	1.7638	1.9544
3.0	1.0238	1.2283	1.4336	1.5365
3.5	1.0339	1.1447	1.2561	1.3120
4.0	1.0395	1.0999	1.1604	1.1907
5.0	1.0441	1.0623	1.0804	1.0896
7.5	1.0463	1.0470	1.0479	1.0484
10.0	1.0463	1.0463	1.0463	1.0463
15.0	1.0463	1.0463	1.0463	1.0463
17.0	1.0463	1.0463	1.0463	1.0463
20.0	1.0463	1.0463	1.0463	1.0463
50.0	1.0463			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche $Tau=0/Tau(i)$

0.3	0.7220	0.7284	0.7269	0.7262
0.5	0.7045	0.7124	0.7113	0.7107
0.8	0.6880	0.6962	0.6954	0.6950
1.0	0.6807	0.6883	0.6876	0.6872
1.2	0.6737	0.6816	0.6809	0.6806
1.5	0.6658	0.6733	0.6728	0.6726
2.0	0.6550	0.6628	0.6624	0.6622
2.5	0.6471	0.6549	0.6544	0.6542
3.0	0.6400	0.6483	0.6480	0.6478
3.5	0.6331	0.6431	0.6428	0.6427
4.0	0.6293	0.6386	0.6385	0.6385
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche $Tau(i-1)/Tau(i)$

0.3	0.7220	0.7284	0.7269	0.7262
0.5	0.6782	0.6883	0.6878	0.6875
0.8	0.6606	0.6693	0.6690	0.6688
1.0	0.6516	0.6566	0.6561	0.6559
1.2	0.6382	0.6481	0.6479	0.6478
1.5	0.6342	0.6401	0.6403	0.6403
2.0	0.6229	0.6314	0.6311	0.6310
2.5	0.6154	0.6230	0.6223	0.6223
3.0	0.6043	0.6154	0.6160	0.6160
3.5	0.5920	0.6123	0.6121	0.6116
4.0	0.6022	0.6065	0.6083	0.6092
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.661 0.670 0.669 0.669



Tableau I-5c

Fonction B3

Pi0= 0.60

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.4631	7.4406	14.4339	17.9368
0.5	0.6820	6.2383	11.8116	14.6047
0.8	0.9253	4.9086	8.9063	10.9114
1.0	1.0466	4.2500	7.4663	9.0794
1.2	1.1435	3.7259	6.3198	7.6209
1.5	1.2544	3.1305	5.0151	5.9607
2.0	1.3750	2.4848	3.5996	4.1589
2.5	1.4461	2.1067	2.7706	3.1036
3.0	1.4888	1.8838	2.2806	2.4800
3.5	1.5140	1.7510	1.9892	2.1087
4.0	1.5293	1.6719	1.8152	1.8871
5.0	1.5438	1.5956	1.6482	1.6744
7.5	1.5517	1.5556	1.5601	1.5623
10.0	1.5523	1.5525	1.5529	1.5521
15.0	1.5523	1.5523	1.5523	1.5523
17.0	1.5523	1.5523	1.5523	1.5523
20.0	1.5523	1.5523	1.5523	1.5523
50.0	1.5523			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.5905	0.5998	0.5979	0.5970
0.5	0.5787	0.5877	0.5861	0.5854
0.8	0.5666	0.5753	0.5742	0.5736
1.0	0.5608	0.5692	0.5682	0.5677
1.2	0.5560	0.5641	0.5632	0.5627
1.5	0.5503	0.5578	0.5570	0.5567
2.0	0.5424	0.5496	0.5490	0.5488
2.5	0.5364	0.5434	0.5429	0.5427
3.0	0.5327	0.5386	0.5382	0.5379
3.5	0.5290	0.5346	0.5343	0.5341
4.0	0.5263	0.5313	0.5309	0.5308
5.0	0.5208	0.5262	0.5255	0.5254
7.5	0.5204	0.5223	0.5178	0.5174
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.5905	0.5998	0.5979	0.5970
0.5	0.5610	0.5694	0.5684	0.5679
0.8	0.5466	0.5547	0.5543	0.5539
1.0	0.5375	0.5448	0.5442	0.5441
1.2	0.5318	0.5387	0.5382	0.5380
1.5	0.5275	0.5326	0.5324	0.5324
2.0	0.5186	0.5250	0.5250	0.5250
2.5	0.5127	0.5187	0.5186	0.5185
3.0	0.5141	0.5144	0.5145	0.5141
3.5	0.5071	0.5110	0.5107	0.5110
4.0	0.5074	0.5077	0.5077	0.5078
5.0	0.4985	0.5059	0.5039	0.5039
7.5	0.5196	0.5145	0.5022	0.5012
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.544 0.551 0.550 0.550



Tableau I-5d

Fonction R3

F₁₀= 0.70

Tau	R0=0.00	R0=0.10	R0=0.20	R0=0.25
0.3	0.5659	8.1114	15.6784	19.4704
0.5	0.8545	7.1616	13.4946	16.6717
0.8	1.1965	6.0481	10.9250	13.3724
1.0	1.3777	5.4617	9.5705	11.6327
1.2	1.5289	4.9746	8.4405	10.1808
1.5	1.7132	4.3883	7.0801	8.4334
2.0	1.9316	3.6955	5.4711	6.3647
2.5	2.0760	3.2444	4.4201	5.0118
3.0	2.1715	2.9475	3.7297	4.1231
3.5	2.2343	2.7514	3.2725	3.5345
4.0	2.2768	2.6219	2.9698	3.1441
5.0	2.3239	2.4786	2.6333	2.7121
7.5	2.3571	2.3777	2.3991	2.4096
10.0	2.3617	2.3644	2.3672	2.3689
15.0	2.3625	2.3625	2.3625	2.3627
17.0	2.3625	2.3625	2.3625	2.3625
20.0	2.3625	2.3625	2.3625	2.3625
50.0	2.3625			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.4564	0.4694	0.4670	0.4658
0.5	0.4489	0.4609	0.4589	0.4578
0.8	0.4413	0.4521	0.4504	0.4496
1.0	0.4375	0.4477	0.4462	0.4456
1.2	0.4341	0.4439	0.4427	0.4421
1.5	0.4305	0.4395	0.4385	0.4379
2.0	0.4254	0.4338	0.4329	0.4324
2.5	0.4219	0.4294	0.4288	0.4284
3.0	0.4192	0.4260	0.4254	0.4250
3.5	0.4163	0.4232	0.4226	0.4223
4.0	0.4146	0.4208	0.4203	0.4202
5.0	0.4115	0.4169	0.4169	0.4165
7.5	0.4057	0.4123	0.4111	0.4111
10.0	0.3996	0.4114	0.4096	0.4073
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.4564	0.4694	0.4670	0.4658
0.5	0.4378	0.4482	0.4466	0.4458
0.8	0.4287	0.4373	0.4364	0.4361
1.0	0.4222	0.4305	0.4295	0.4292
1.2	0.4169	0.4249	0.4252	0.4250
1.5	0.4163	0.4219	0.4216	0.4211
2.0	0.4100	0.4164	0.4163	0.4160
2.5	0.4081	0.4119	0.4121	0.4121
3.0	0.4057	0.4094	0.4084	0.4083
3.5	0.3985	0.4058	0.4060	0.4061
4.0	0.4031	0.4046	0.4043	0.4050
5.0	0.3992	0.4012	0.4032	0.4020
7.5	0.3941	0.4032	0.3996	0.4003
10.0	0.3813	0.4084	0.4052	0.3958
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.421 0.430 0.429 0.428



Tableau I-5e

Fonction R3 FIo= 0.75

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.6273	8.4767	16.3528	20.3009
0.5	0.9592	7.6869	14.4456	17.8373
0.8	1.3664	6.7313	12.1282	14.8390
1.0	1.5892	6.2138	10.8678	13.2072
1.2	1.7809	5.7717	9.7915	11.8125
1.5	2.0190	5.2258	8.4577	10.0831
2.0	2.3169	4.5525	6.8074	7.9423
2.5	2.5238	4.0881	5.6662	6.4616
3.0	2.6684	3.7661	4.8735	5.4307
3.5	2.7710	3.5420	4.3200	4.7123
4.0	2.8429	3.3852	3.9324	4.2090
5.0	2.9284	3.1985	3.4699	3.6068
7.5	2.9993	3.0463	3.0941	3.1182
10.0	3.0115	3.0197	3.0278	3.0322
15.0	3.0138	3.0142	3.0144	3.0146
17.0	3.0138	3.0138	3.0142	3.0142
20.0	3.0138	3.0138	3.0138	3.0138
50.0	3.0138			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.3890	0.4036	0.4007	0.3993
0.5	0.3831	0.3964	0.3940	0.3929
0.8	0.3775	0.3892	0.3873	0.3864
1.0	0.3747	0.3856	0.3840	0.3832
1.2	0.3724	0.3827	0.3812	0.3805
1.5	0.3695	0.3791	0.3778	0.3771
2.0	0.3661	0.3745	0.3734	0.3729
2.5	0.3633	0.3710	0.3701	0.3697
3.0	0.3610	0.3682	0.3675	0.3671
3.5	0.3598	0.3661	0.3654	0.3651
4.0	0.3588	0.3643	0.3638	0.3634
5.0	0.3563	0.3612	0.3609	0.3607
7.5	0.3559	0.3574	0.3568	0.3566
10.0	0.3598	0.3553	0.3559	0.3550
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.3890	0.4036	0.4007	0.3993
0.5	0.3744	0.3855	0.3840	0.3832
0.8	0.3682	0.3773	0.3761	0.3756
1.0	0.3632	0.3712	0.3707	0.3703
1.2	0.3613	0.3685	0.3674	0.3670
1.5	0.3576	0.3645	0.3641	0.3639
2.0	0.3559	0.3608	0.3604	0.3601
2.5	0.3523	0.3571	0.3570	0.3567
3.0	0.3497	0.3542	0.3542	0.3546
3.5	0.3525	0.3533	0.3532	0.3527
4.0	0.3512	0.3519	0.3519	0.3514
5.0	0.3467	0.3485	0.3496	0.3499
7.5	0.3552	0.3500	0.3485	0.3484
10.0	0.3714	0.3488	0.3530	0.3504
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.361 0.369 0.368 0.367



Tableau I-5f

Fonction B3 $PI_0 = 0.80$

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.6884	8.8585	17.0591	21.1710
0.5	1.0694	8.2489	15.4682	19.0923
0.8	1.5511	7.4910	13.4731	16.4800
1.0	1.8243	7.0686	12.3539	15.0124
1.2	2.0654	6.6997	11.3740	13.7262
1.5	2.3749	6.2304	10.1232	12.0836
2.0	2.7796	5.6262	8.5028	9.9525
2.5	3.0788	5.1859	7.3165	8.3904
3.0	3.3007	4.8632	6.4439	7.2410
3.5	3.4658	4.6259	5.7996	6.3916
4.0	3.5885	4.4504	5.3226	5.7629
5.0	3.7478	4.2249	4.7076	4.9508
7.5	3.9021	4.0111	4.1210	4.1767
10.0	3.9378	3.9624	3.9874	4.0002
15.0	3.9478	3.9490	3.9503	3.9510
17.0	3.9482	3.9485	3.9489	3.9493
20.0	3.9482	3.9483	3.9484	3.9484
50.0	3.9483			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.3193	0.3368	0.3337	0.3322
0.5	0.3159	0.3314	0.3286	0.3272
0.8	0.3119	0.3256	0.3233	0.3222
1.0	0.3100	0.3227	0.3208	0.3198
1.2	0.3085	0.3205	0.3187	0.3178
1.5	0.3067	0.3177	0.3161	0.3153
2.0	0.3044	0.3141	0.3128	0.3121
2.5	0.3026	0.3114	0.3103	0.3098
3.0	0.3013	0.3094	0.3084	0.3079
3.5	0.3003	0.3077	0.3069	0.3065
4.0	0.2994	0.3064	0.3057	0.3053
5.0	0.2980	0.3043	0.3037	0.3034
7.5	0.2966	0.3013	0.3010	0.3008
10.0	0.2964	0.3003	0.3000	0.2996
15.0	0.2977	0.2996	0.2986	0.2986
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.3193	0.3368	0.3337	0.3322
0.5	0.3107	0.3231	0.3209	0.3198
0.8	0.3052	0.3159	0.3146	0.3139
1.0	0.3025	0.3114	0.3105	0.3100
1.2	0.3013	0.3092	0.3081	0.3077
1.5	0.2993	0.3067	0.3058	0.3054
2.0	0.2973	0.3033	0.3029	0.3027
2.5	0.2957	0.3008	0.3005	0.3004
3.0	0.2947	0.2991	0.2988	0.2986
3.5	0.2944	0.2978	0.2977	0.2977
4.0	0.2934	0.2970	0.2970	0.2968
5.0	0.2924	0.2958	0.2958	0.2960
7.5	0.2936	0.2954	0.2956	0.2955
10.0	0.2958	0.2974	0.2970	0.2962
15.0	0.3003	0.2981	0.2959	0.2966
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.298 0.307 0.306 0.306



Tableau I-5g

Fonction B3

PIo= 0.85

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.7547	9.2597	17.8026	22.0874
0.5	1.1889	8.8583	16.5759	20.4524
0.8	1.7605	8.2472	14.9904	18.3322
1.0	2.0960	8.0548	14.0719	17.1017
1.2	2.4001	7.7957	13.2485	15.9964
1.5	2.8031	7.4570	12.1654	14.5403
2.0	3.3578	7.0025	10.6951	12.5595
2.5	3.7948	6.6537	9.5533	11.0187
3.0	4.1390	6.3843	8.6629	9.8153
3.5	4.4102	6.1751	7.9667	8.8735
4.0	4.6252	6.0127	7.4214	8.1351
5.0	4.9284	5.7864	6.6587	7.0998
7.5	5.2768	5.5347	5.7971	5.9301
10.0	5.3828	5.4605	5.5390	5.5785
15.0	5.4250	5.4319	5.4389	5.4424
17.0	5.4275	5.4300	5.4329	5.4342
20.0	5.4275	5.4292	5.4298	5.4302
50.0	5.4290			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.2495	0.2699	0.2662	0.2644
0.5	0.2472	0.2653	0.2622	0.2607
0.8	0.2450	0.2705	0.2583	0.2570
1.0	0.2439	0.2589	0.2564	0.2552
1.2	0.2432	0.2571	0.2549	0.2538
1.5	0.2421	0.2550	0.2530	0.2520
2.0	0.2409	0.2523	0.2507	0.2499
2.5	0.2401	0.2504	0.2490	0.2483
3.0	0.2395	0.2490	0.2477	0.2471
3.5	0.2390	0.2478	0.2467	0.2461
4.0	0.2388	0.2469	0.2459	0.2454
5.0	0.2384	0.2456	0.2447	0.2443
7.5	0.2383	0.2439	0.2433	0.2430
10.0	0.2383	0.2429	0.2426	0.2425
15.0	0.2401	0.2424	0.2423	0.2423
17.0	0.2404	0.2437	0.2418	0.2416
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.2495	0.2699	0.2662	0.2644
0.5	0.2437	0.2585	0.2562	0.2551
0.8	0.2414	0.2792	0.2517	0.2509
1.0	0.2398	0.2122	0.2490	0.2482
1.2	0.2392	0.2482	0.2472	0.2466
1.5	0.2380	0.2464	0.2455	0.2451
2.0	0.2373	0.2444	0.2437	0.2434
2.5	0.2369	0.2428	0.2423	0.2420
3.0	0.2365	0.2416	0.2413	0.2411
3.5	0.2360	0.2408	0.2406	0.2404
4.0	0.2370	0.2406	0.2405	0.2403
5.0	0.2367	0.2403	0.2400	0.2401
7.5	0.2382	0.2404	0.2403	0.2403
10.0	0.2384	0.2400	0.2407	0.2411
15.0	0.2436	0.2414	0.2418	0.2419
17.0	0.2431	0.2532	0.2375	0.2363
20.0				

(K/c)= 0.236 0.246 0.244 0.243



Fonction R3

P₁₀ = 0.90

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.8331	9.6949	18.5991	23.0673
0.5	1.3346	9.5378	17.7990	21.9522
0.8	2.0209	9.3430	16.7375	20.4626
1.0	2.4389	9.2330	16.1059	19.5718
1.2	2.8280	9.1366	15.5254	18.7513
1.5	3.3638	9.0102	14.7411	17.6367
2.0	4.1397	8.8431	13.6243	16.0462
2.5	4.7932	8.7126	12.7050	14.7296
3.0	5.3423	8.6117	11.9455	13.6376
3.5	5.8047	8.5317	11.3158	12.7300
4.0	6.1928	8.4683	10.7934	11.9748
5.0	6.7944	8.3781	9.9974	10.8210
7.5	7.6316	8.2682	8.9206	9.2537
10.0	7.9758	8.2301	8.4918	8.6241
15.0	8.1723	8.2114	8.2528	8.2741
17.0	8.1912	8.2099	8.2293	8.2392
20.0	8.2030	8.2093	8.2154	8.2185
50.0	8.2089			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.1784	0.2014	0.1974	0.1954
0.5	0.1774	0.1981	0.1945	0.1927
0.8	0.1766	0.1948	0.1917	0.1902
1.0	0.1763	0.1933	0.1904	0.1889
1.2	0.1760	0.1919	0.1893	0.1880
1.5	0.1758	0.1905	0.1880	0.1868
2.0	0.1754	0.1886	0.1865	0.1854
2.5	0.1754	0.1873	0.1855	0.1845
3.0	0.1754	0.1863	0.1847	0.1839
3.5	0.1754	0.1856	0.1841	0.1834
4.0	0.1755	0.1850	0.1837	0.1830
5.0	0.1758	0.1843	0.1832	0.1826
7.5	0.1770	0.1836	0.1828	0.1823
10.0	0.1781	0.1836	0.1829	0.1826
15.0	0.1804	0.1848	0.1838	0.1834
17.0	0.1806	0.1848	0.1842	0.1840
20.0	0.1809	0.1843	0.1846	0.1847

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.1784	0.2014	0.1974	0.1954
0.5	0.1760	0.1931	0.1902	0.1887
0.8	0.1753	0.1894	0.1870	0.1859
1.0	0.1749	0.1872	0.1850	0.1840
1.2	0.1745	0.1853	0.1840	0.1830
1.5	0.1748	0.1848	0.1830	0.1824
2.0	0.1745	0.1827	0.1819	0.1813
2.5	0.1750	0.1823	0.1813	0.1809
3.0	0.1753	0.1813	0.1808	0.1805
3.5	0.1759	0.1814	0.1808	0.1805
4.0	0.1761	0.1810	0.1806	0.1804
5.0	0.1772	0.1812	0.1810	0.1809
7.5	0.1792	0.1822	0.1820	0.1818
10.0	0.1814	0.1836	0.1831	0.1834
15.0	0.1851	0.1871	0.1858	0.1851
17.0	0.1816	0.1847	0.1868	0.1879
20.0	0.1827	0.1815	0.1871	0.1887

(K/c)= 0.173 0.182 0.181 0.180



Tableau I-5i

Fonction B3

P_{io} = 0.95

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.9002	10.1346	19.4191	24.0804
0.5	1.4689	10.2492	19.1020	23.5559
0.8	2.2811	10.4363	18.6982	22.8511
1.0	2.7970	10.5661	18.4438	22.4240
1.2	3.2934	10.6978	18.2197	22.0256
1.5	4.0030	10.8959	17.9159	21.4746
2.0	5.0975	11.2213	17.4804	20.6621
2.5	6.0896	11.5344	17.1157	19.9592
3.0	6.9880	11.8308	16.8074	19.3476
3.5	7.8005	12.1087	16.5449	18.8130
4.0	8.5347	12.3672	16.3207	18.3447
5.0	9.7943	12.8261	15.9627	17.5719
7.5	11.9893	13.6702	15.4169	16.3159
10.0	13.2583	14.1838	15.1475	15.6445
15.0	14.3799	14.6552	14.9425	15.0908
17.0	14.5675	14.7362	14.9121	15.0030
20.0	14.7235	14.8041	14.8881	14.9315
50.0	14.8670			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.1041	0.1327	0.1282	0.1260
0.5	0.1040	0.1301	0.1260	0.1239
0.8	0.1041	0.1275	0.1238	0.1219
1.0	0.1042	0.1262	0.1227	0.1210
1.2	0.1043	0.1252	0.1219	0.1203
1.5	0.1046	0.1240	0.1210	0.1194
2.0	0.1050	0.1226	0.1199	0.1185
2.5	0.1054	0.1216	0.1191	0.1178
3.0	0.1058	0.1208	0.1186	0.1174
3.5	0.1063	0.1203	0.1182	0.1171
4.0	0.1067	0.1199	0.1179	0.1169
5.0	0.1075	0.1193	0.1176	0.1168
7.5	0.1095	0.1189	0.1176	0.1169
10.0	0.1112	0.1190	0.1180	0.1175
15.0	0.1139	0.1197	0.1190	0.1187
17.0	0.1148	0.1201	0.1194	0.1191
20.0	0.1160	0.1205	0.1200	0.1197

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.1041	0.1327	0.1282	0.1260
0.5	0.1039	0.1261	0.1225	0.1208
0.8	0.1042	0.1231	0.1201	0.1186
1.0	0.1046	0.1212	0.1186	0.1173
1.2	0.1050	0.1202	0.1179	0.1167
1.5	0.1055	0.1193	0.1172	0.1161
2.0	0.1062	0.1183	0.1165	0.1156
2.5	0.1071	0.1175	0.1161	0.1153
3.0	0.1080	0.1172	0.1159	0.1153
3.5	0.1088	0.1170	0.1159	0.1154
4.0	0.1097	0.1170	0.1161	0.1156
5.0	0.1109	0.1172	0.1164	0.1161
7.5	0.1134	0.1180	0.1175	0.1173
10.0	0.1163	0.1193	0.1191	0.1190
15.0	0.1195	0.1212	0.1211	0.1211
17.0	0.1216	0.1225	0.1226	0.1225
20.0	0.1227	0.1231	0.1232	0.1232

(K/c)= 0.106 0.116 0.114 0.114



Fonction B5

P₁₀= 0.20

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.2068	5.3420	10.4818	13.0524
0.5	0.2802	3.6685	7.0603	8.7573
0.8	0.3456	2.1977	4.0520	4.9800
1.0	0.3721	1.6211	2.8723	3.4979
1.2	0.3893	1.2367	2.0846	2.5093
1.5	0.4053	0.8816	1.3594	1.5984
2.0	0.4179	0.6035	0.7891	0.8824
2.5	0.4227	0.4963	0.5695	0.6064
3.0	0.4248	0.4540	0.4831	0.4978
3.5	0.4252	0.4370	0.4490	0.4547
4.0	0.4255	0.4303	0.4349	0.4377
5.0	0.4257	0.4267	0.4274	0.4276
7.5	0.4261	0.4261	0.4261	0.4261
10.0	0.4261	0.4261	0.4261	0.4261
15.0	0.4261	0.4261	0.4261	0.4261
17.0	0.4261	0.4261	0.4261	0.4261
20.0	0.4261	0.4261	0.4261	0.4261
50.0	0.4261			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	1.1067	1.1108	1.1100	1.1098
0.5	1.0717	1.0823	1.0817	1.0815
0.8	1.0416	1.0539	1.0535	1.0534
1.0	1.0330	1.0401	1.0397	1.0396
1.2	1.0203	1.0284	1.0283	1.0281
1.5	1.0067	1.0148	1.0143	1.0141
2.0	0.9875	0.9967	0.9967	0.9964
2.5	0.9641	0.9823	0.9828	0.9827
3.0	0.9606	0.9728	0.9728	0.9726
3.5	0.8713	0.9629	0.9617	0.9629
4.0				
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	1.1067	1.1108	1.1100	1.1098
0.5	1.0191	1.0395	1.0393	1.0391
0.8	0.9914	1.0067	1.0066	1.0065
1.0	0.9989	0.9850	0.9843	0.9845
1.2	0.9568	0.9696	0.9713	0.9706
1.5	0.9522	0.9604	0.9581	0.9582
2.0	0.9299	0.9425	0.9441	0.9434
2.5	0.8704	0.9246	0.9271	0.9277
3.0	0.9433	0.9254	0.9228	0.9220
3.5	0.3357	0.9033	0.8953	0.9046
4.0				
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 1.006 1.020 1.020 1.020



Fonction B5 P10= 0.50

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.5886	6.9984	13.4245	16.6428
0.5	0.8464	5.6879	10.5450	12.9793
0.8	1.1152	4.3291	7.5556	9.1736
1.0	1.2405	3.6992	6.1679	7.4063
1.2	1.3355	3.2222	5.1171	6.0676
1.5	1.4376	2.7117	3.9913	4.6338
2.0	1.5395	2.2075	2.8791	3.2159
2.5	1.5923	1.9457	2.3009	2.4791
3.0	1.6202	1.8083	1.9974	2.0922
3.5	1.6354	1.7357	1.8370	1.8876
4.0	1.6433	1.6972	1.7512	1.7785
5.0	1.6497	1.6655	1.6811	1.6892
7.5	1.6525	1.6532	1.6537	1.6542
10.0	1.6525	1.6527	1.6527	1.6527
15.0	1.6525	1.6525	1.6525	1.6525
17.0	1.6525	1.6525	1.6525	1.6525
20.0	1.6525	1.6525	1.6525	1.6525
50.0	1.6525			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.7339	0.7413	0.7391	0.7382
0.5	0.7178	0.7254	0.7238	0.7229
0.8	0.7022	0.7094	0.7082	0.7076
1.0	0.6945	0.7015	0.7005	0.6999
1.2	0.6880	0.6949	0.6940	0.6935
1.5	0.6799	0.6868	0.6861	0.6856
2.0	0.6706	0.6765	0.6758	0.6756
2.5	0.6625	0.6686	0.6681	0.6678
3.0	0.6561	0.6622	0.6618	0.6616
3.5	0.6533	0.6575	0.6568	0.6566
4.0	0.6489	0.6528	0.6528	0.6525
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.7339	0.7413	0.7391	0.7382
0.5	0.6936	0.7015	0.7007	0.7001
0.8	0.6763	0.6829	0.6823	0.6820
1.0	0.6634	0.6696	0.6694	0.6692
1.2	0.6555	0.6620	0.6617	0.6616
1.5	0.6476	0.6543	0.6543	0.6540
2.0	0.6427	0.6457	0.6452	0.6453
2.5	0.6303	0.6368	0.6369	0.6368
3.0	0.6238	0.6307	0.6306	0.6307
3.5	0.6365	0.6288	0.6266	0.6266
4.0	0.6185	0.6202	0.6253	0.6236
5.0				
7.5				
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.677 0.684 0.683 0.682



Tableau I-6c

Fonction B5 P₁₀= 0.60

Tau	R0=0.00	R0=0.10	R0=0.20	R0=0.25
0.3	0.7412	7.6550	14.5911	18.0672
0.5	1.0895	6.5616	12.0569	14.8132
0.8	1.4752	5.3608	9.2673	11.2280
1.0	1.6655	4.7708	7.8938	9.4620
1.2	1.8170	4.3042	6.8066	8.0637
1.5	1.9886	3.7780	5.5788	6.4838
2.0	2.1734	3.2141	4.2618	4.7885
2.5	2.2807	2.8896	3.5029	3.8112
3.0	2.3430	2.7010	3.0616	3.2427
3.5	2.3798	2.5911	2.8036	2.9106
4.0	2.4013	2.5266	2.6520	2.7152
5.0	2.4218	2.4656	2.5099	2.5324
7.5	2.4321	2.4352	2.4387	2.4404
10.0	2.4329	2.4332	2.4334	2.4334
15.0	2.4329	2.4329	2.4329	2.4329
17.0	2.4329	2.4329	2.4329	2.4329
20.0	2.4329	2.4329	2.4329	2.4329
50.0	2.4329			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.6055	0.6151	0.6124	0.6111
0.5	0.5939	0.6029	0.6008	0.5998
0.8	0.5827	0.5908	0.5891	0.5883
1.0	0.5769	0.5847	0.5833	0.5826
1.2	0.5724	0.5798	0.5785	0.5778
1.5	0.5668	0.5736	0.5725	0.5720
2.0	0.5595	0.5657	0.5648	0.5644
2.5	0.5543	0.5597	0.5590	0.5587
3.0	0.5497	0.5550	0.5544	0.5541
3.5	0.5465	0.5511	0.5506	0.5503
4.0	0.5430	0.5475	0.5474	0.5472
5.0	0.5390	0.5430	0.5425	0.5420
7.5	0.5361	0.5392	0.5347	0.5344
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.6055	0.6151	0.6124	0.6111
0.5	0.5764	0.5846	0.5834	0.5827
0.8	0.5640	0.5706	0.5697	0.5693
1.0	0.5539	0.5604	0.5600	0.5597
1.2	0.5499	0.5549	0.5543	0.5541
1.5	0.5442	0.5488	0.5486	0.5484
2.0	0.5377	0.5420	0.5418	0.5417
2.5	0.5335	0.5359	0.5357	0.5357
3.0	0.5266	0.5312	0.5311	0.5313
3.5	0.5274	0.5277	0.5282	0.5278
4.0	0.5183	0.5224	0.5249	0.5250
5.0	0.5232	0.5251	0.5230	0.5215
7.5	0.5303	0.5317	0.5190	0.5190
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.561 0.567 0.566 0.565



Fonction B5

Pi0= 0.70

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.9111	8.3770	15.8730	19.6333
0.5	1.3727	7.5708	13.8034	16.9338
0.8	1.9155	6.6327	11.3837	13.7714
1.0	2.2014	6.1439	10.1184	12.1171
1.2	2.4389	5.7401	9.0693	10.7446
1.5	2.7239	5.2591	7.8178	9.1052
2.0	3.0586	4.6987	6.3549	7.1902
2.5	3.2737	4.3401	5.4176	5.9594
3.0	3.4143	4.1086	4.8109	5.1650
3.5	3.5055	3.9594	4.4179	4.6491
4.0	3.5654	3.8620	4.1622	4.3138
5.0	3.6300	3.7574	3.8862	3.9512
7.5	3.6729	3.6888	3.7046	3.7126
10.0	3.6781	3.6798	3.6819	3.6829
15.0	3.6787	3.6787	3.6789	3.6789
17.0	3.6787	3.6787	3.6787	3.6787
20.0	3.6787	3.6787	3.6787	3.6787
50.0	3.6787			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.4743	0.4871	0.4837	0.4819
0.5	0.4670	0.4784	0.4756	0.4741
0.8	0.4597	0.4696	0.4674	0.4663
1.0	0.4562	0.4654	0.4634	0.4624
1.2	0.4532	0.4618	0.4600	0.4591
1.5	0.4496	0.4574	0.4559	0.4552
2.0	0.4451	0.4520	0.4507	0.4501
2.5	0.4413	0.4477	0.4466	0.4462
3.0	0.4388	0.4446	0.4436	0.4431
3.5	0.4365	0.4418	0.4410	0.4407
4.0	0.4350	0.4397	0.4390	0.4386
5.0	0.4325	0.4361	0.4358	0.4355
7.5	0.4298	0.4296	0.4298	0.4296
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.4743	0.4871	0.4837	0.4819
0.5	0.4561	0.4653	0.4633	0.4623
0.8	0.4473	0.4550	0.4537	0.4533
1.0	0.4423	0.4485	0.4473	0.4468
1.2	0.4381	0.4438	0.4433	0.4429
1.5	0.4353	0.4400	0.4394	0.4393
2.0	0.4317	0.4355	0.4352	0.4347
2.5	0.4261	0.4305	0.4302	0.4307
3.0	0.4264	0.4292	0.4286	0.4279
3.5	0.4229	0.4249	0.4256	0.4258
4.0	0.4242	0.4256	0.4246	0.4240
5.0	0.4226	0.4217	0.4229	0.4230
7.5	0.4245	0.4166	0.4178	0.4180
10.0				
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.441 0.449 0.447 0.447



Fonction B5

P_{io} = 0.75

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	0.9993	8.7611	16.5588	20.4703
0.5	1.5249	8.1281	14.7737	18.1129
0.8	2.1654	7.3714	12.6220	15.2632
1.0	2.5130	6.9666	11.4618	13.7249
1.2	2.8096	6.6239	10.4773	12.4183
1.5	3.1754	6.2050	9.2681	10.8121
2.0	3.6249	5.6964	7.7925	8.8496
2.5	3.9320	5.3532	6.7910	7.5179
3.0	4.1424	5.1199	6.1095	6.6079
3.5	4.2883	4.9603	5.6422	5.9859
4.0	4.3877	4.8512	5.3208	5.5581
5.0	4.5048	4.7253	4.9489	5.0620
7.5	4.5947	4.6294	4.6650	4.6824
10.0	4.6090	4.6145	4.6198	4.6229
15.0	4.6116	4.6116	4.6118	4.6118
17.0	4.6116	4.6116	4.6116	4.6116
20.0	4.6116	4.6116	4.6116	4.6116
50.0	4.6116			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.4070	0.4223	0.4184	0.4166
0.5	0.4015	0.4150	0.4118	0.4102
0.8	0.3963	0.4080	0.4053	0.4040
1.0	0.3936	0.4044	0.4021	0.4009
1.2	0.3915	0.4016	0.3995	0.3984
1.5	0.3889	0.3980	0.3962	0.3953
2.0	0.3855	0.3936	0.3921	0.3914
2.5	0.3830	0.3902	0.3891	0.3884
3.0	0.3809	0.3876	0.3865	0.3861
3.5	0.3797	0.3857	0.3847	0.3842
4.0	0.3781	0.3839	0.3831	0.3827
5.0	0.3766	0.3814	0.3808	0.3804
7.5	0.3738	0.3775	0.3766	0.3768
10.0	0.3731	0.3749	0.3758	0.3746
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.4070	0.4223	0.4184	0.4166
0.5	0.3932	0.4042	0.4019	0.4006
0.8	0.3876	0.3962	0.3944	0.3937
1.0	0.3831	0.3902	0.3893	0.3886
1.2	0.3809	0.3874	0.3862	0.3858
1.5	0.3782	0.3839	0.3832	0.3828
2.0	0.3754	0.3802	0.3798	0.3796
2.5	0.3729	0.3768	0.3769	0.3764
3.0	0.3705	0.3742	0.3739	0.3746
3.5	0.3725	0.3748	0.3736	0.3732
4.0	0.3673	0.3714	0.3722	0.3719
5.0	0.3702	0.3715	0.3713	0.3711
7.5	0.3682	0.3698	0.3684	0.3697
10.0	0.3713	0.3670	0.3734	0.3680
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.381 0.389 0.387 0.386



Tableau I-6f

Fonction R5 P₁₀= 0.80

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	1.0977	9.1706	17.2845	21.3565
0.5	1.6989	8.7394	15.8310	19.3962
0.8	2.4567	8.2128	14.0249	16.9521
1.0	2.8824	7.9242	13.0205	15.5901
1.2	3.2549	7.6747	12.1480	14.4039
1.5	3.7280	7.3623	11.0442	12.9032
2.0	4.3385	6.9674	9.6349	10.9832
2.5	4.7804	6.6871	8.6232	9.6028
3.0	5.1016	6.4868	7.8938	8.6060
3.5	5.3359	6.3426	7.3659	7.8841
4.0	5.5062	6.2388	6.9836	7.3605
5.0	5.7215	6.1093	6.5040	6.7034
7.5	5.9153	5.9949	6.0757	6.1164
10.0	5.9556	5.9718	5.9884	5.9966
15.0	5.9655	5.9659	5.9666	5.9670
17.0	5.9657	5.9659	5.9659	5.9661
20.0	5.9657	5.9657	5.9657	5.9659
50.0	5.9657			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.3389	0.3568	0.3526	0.3505
0.5	0.3352	0.3509	0.3473	0.3455
0.8	0.3317	0.3452	0.3422	0.3407
1.0	0.3300	0.3424	0.3397	0.3383
1.2	0.3287	0.3402	0.3377	0.3365
1.5	0.3269	0.3374	0.3352	0.3341
2.0	0.3248	0.3340	0.3322	0.3313
2.5	0.3232	0.3315	0.3299	0.3291
3.0	0.3220	0.3295	0.3282	0.3275
3.5	0.3212	0.3280	0.3268	0.3262
4.0	0.3205	0.3267	0.3257	0.3252
5.0	0.3196	0.3250	0.3241	0.3237
7.5	0.3183	0.3223	0.3217	0.3215
10.0	0.3189	0.3212	0.3206	0.3206
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.3389	0.3568	0.3526	0.3505
0.5	0.3296	0.3421	0.3394	0.3380
0.8	0.3259	0.3357	0.3337	0.3326
1.0	0.3233	0.3313	0.3299	0.3291
1.2	0.3219	0.3292	0.3275	0.3271
1.5	0.3196	0.3261	0.3253	0.3247
2.0	0.3186	0.3238	0.3231	0.3227
2.5	0.3169	0.3213	0.3208	0.3205
3.0	0.3161	0.3195	0.3194	0.3193
3.5	0.3162	0.3191	0.3188	0.3186
4.0	0.3153	0.3178	0.3177	0.3179
5.0	0.3162	0.3181	0.3178	0.3179
7.5	0.3157	0.3169	0.3169	0.3172
10.0	0.3206	0.3180	0.3174	0.3180
15.0				
17.0				
20.0				

(K/c)= 0.320 0.328 0.326 0.326



Fonction B5

Pi0= 0.85

Tau	RD=0.00	RD=0.10	RD=0.20	RD=0.25
0.3	1.2009	9.6009	18.0489	22.2910
0.5	1.8873	9.4003	16.9759	20.7874
0.8	2.7832	9.1576	15.6046	18.8556
1.0	3.3042	9.0247	14.8195	17.7451
1.2	3.7723	8.9099	14.1211	16.7547
1.5	4.3878	8.7650	13.2121	15.4625
2.0	5.2213	8.5793	11.9979	13.7304
2.5	5.8640	8.4442	11.0744	12.4088
3.0	6.3605	8.3445	10.3692	11.3972
3.5	6.7442	8.2707	9.8295	10.6213
4.0	7.0407	8.2155	9.4158	10.0257
5.0	7.4471	8.1429	8.8543	9.2160
7.5	7.8830	8.0703	8.2620	8.3595
10.0	8.0019	8.0520	8.1032	8.1293
15.0	8.0426	8.0460	8.0468	8.0515
17.0	8.0446	8.0458	8.0471	8.0477
20.0	8.0454	8.0457	8.0459	8.0460
50.0	8.0456			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.2694	0.2906	0.2858	0.2835
0.5	0.2673	0.2859	0.2818	0.2797
0.8	0.2653	0.2814	0.2779	0.2761
1.0	0.2644	0.2793	0.2760	0.2744
1.2	0.2636	0.2775	0.2745	0.2730
1.5	0.2628	0.2754	0.2727	0.2714
2.0	0.2617	0.2728	0.2706	0.2694
2.5	0.2610	0.2709	0.2690	0.2680
3.0	0.2606	0.2696	0.2679	0.2670
3.5	0.2602	0.2685	0.2670	0.2663
4.0	0.2600	0.2677	0.2663	0.2657
5.0	0.2598	0.2665	0.2654	0.2649
7.5	0.2601	0.2652	0.2644	0.2640
10.0	0.2608	0.2649	0.2643	0.2640
15.0	0.2626	0.2654	0.2618	0.2645
17.0	0.2637	0.2655	0.2645	0.2646
20.0				

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.2694	0.2906	0.2858	0.2835
0.5	0.2642	0.2790	0.2757	0.2741
0.8	0.2620	0.2739	0.2714	0.2701
1.0	0.2606	0.2706	0.2686	0.2676
1.2	0.2599	0.2687	0.2670	0.2662
1.5	0.2592	0.2670	0.2656	0.2649
2.0	0.2586	0.2651	0.2640	0.2635
2.5	0.2582	0.2635	0.2628	0.2625
3.0	0.2582	0.2627	0.2622	0.2619
3.5	0.2583	0.2621	0.2618	0.2616
4.0	0.2586	0.2619	0.2617	0.2615
5.0	0.2591	0.2619	0.2617	0.2616
7.5	0.2606	0.2625	0.2624	0.2623
10.0	0.2629	0.2639	0.2639	0.2638
15.0	0.2663	0.2663	0.3168	0.2657
17.0	0.2713	0.2666	0.1348	0.2651
20.0				

(K/c)= 0.257 0.267 0.265 0.264



Fonction B5

Pi0= 0.90

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	1.3106	10.0548	18.8550	23.2763
0.5	2.0933	10.1191	18.2214	22.3017
0.8	3.1548	10.2292	17.3981	21.0184
1.0	3.7955	10.3059	16.9169	20.2608
1.2	4.3879	10.3826	16.4810	19.5698
1.5	5.1945	10.4953	15.9002	18.6426
2.0	6.3473	10.6713	15.0935	17.3425
2.5	7.2979	10.8285	14.4474	16.2909
3.0	8.0816	10.9657	13.9273	15.4378
3.5	8.7278	11.0842	13.5070	14.7441
4.0	9.2601	11.1852	13.1667	14.1793
5.0	10.0589	11.3433	12.6670	13.3443
7.5	11.0971	11.5613	12.0406	12.2861
10.0	11.4802	11.6466	11.8184	11.9064
15.0	11.6695	11.6905	11.7120	11.7232
17.0	11.6851	11.6941	11.7035	11.7083
20.0	11.6937	11.6962	11.6990	11.7003
50.0	11.6970			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.1981	0.2237	0.2183	0.2157
0.5	0.1972	0.2199	0.2152	0.2128
0.8	0.1964	0.2163	0.2122	0.2101
1.0	0.1961	0.2146	0.2107	0.2088
1.2	0.1959	0.2132	0.2096	0.2078
1.5	0.1957	0.2116	0.2083	0.2067
2.0	0.1956	0.2096	0.2068	0.2054
2.5	0.1956	0.2082	0.2057	0.2045
3.0	0.1957	0.2072	0.2050	0.2039
3.5	0.1959	0.2065	0.2045	0.2035
4.0	0.1961	0.2059	0.2041	0.2032
5.0	0.1966	0.2052	0.2037	0.2029
7.5	0.1980	0.2047	0.2036	0.2030
10.0	0.1994	0.2048	0.2040	0.2036
15.0	0.2018	0.2055	0.2051	0.2048
17.0	0.2028	0.2063	0.2057	0.2054
20.0	0.2040	0.2072	0.2059	0.2059

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.1981	0.2237	0.2183	0.2157
0.5	0.1959	0.2143	0.2104	0.2085
0.8	0.1952	0.2103	0.2071	0.2056
1.0	0.1949	0.2077	0.2051	0.2038
1.2	0.1948	0.2063	0.2040	0.2029
1.5	0.1949	0.2050	0.2031	0.2021
2.0	0.1951	0.2037	0.2022	0.2014
2.5	0.1956	0.2027	0.2016	0.2010
3.0	0.1962	0.2022	0.2014	0.2009
3.5	0.1969	0.2021	0.2014	0.2011
4.0	0.1976	0.2022	0.2016	0.2013
5.0	0.1986	0.2024	0.2020	0.2018
7.5	0.2009	0.2035	0.2034	0.2033
10.0	0.2036	0.2052	0.2052	0.2052
15.0	0.2066	0.2070	0.2074	0.2073
17.0	0.2100	0.2125	0.2099	0.2097
20.0	0.2108	0.2118	0.2069	0.2086

(K/c)= 0.193 0.204 0.202 0.201



Fonction B5

P₁₀= 0.95

Tau	RO=0.00	RO=0.10	RO=0.20	RO=0.25
0.3	1.4131	10.5176	19.6838	24.2926
0.5	2.2800	10.8714	19.5464	23.9233
0.8	3.5374	11.4055	19.4018	23.4481
1.0	4.3160	11.7541	19.3236	23.1680
1.2	5.0845	12.0956	19.2736	22.9231
1.5	6.1291	12.5958	19.2137	22.5919
2.0	7.7430	13.3592	19.1527	22.1073
2.5	9.1655	14.0734	19.1350	21.7312
3.0	10.4438	14.7143	19.1411	21.4277
3.5	11.5588	15.2968	19.1765	21.1689
4.0	12.5660	15.8166	19.2175	20.9559
5.0	14.2290	16.7074	19.2956	20.6306
7.5	16.9363	18.1882	19.4970	20.1837
10.0	18.3580	18.9837	19.6429	19.9878
15.0	19.4573	19.6124	19.7772	19.8620
17.0	19.6154	19.7039	19.8010	19.8468
20.0	19.7375	19.7735	19.8169	19.8376
50.0	19.8290			

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.1232	0.1564	0.1507	0.1477
0.5	0.1221	0.1518	0.1470	0.1442
0.8	0.1228	0.1499	0.1448	0.1423
1.0	0.1227	0.1480	0.1436	0.1411
1.2	0.1234	0.1480	0.1430	0.1406
1.5	0.1233	0.1453	0.1414	0.1393
2.0	0.1238	0.1442	0.1403	0.1385
2.5	0.1241	0.1424	0.1392	0.1376
3.0	0.1247	0.1418	0.1388	0.1371
3.5	0.1249	0.1406	0.1379	0.1366
4.0	0.1255	0.1405	0.1376	0.1365
5.0	0.1264	0.1395	0.1373	0.1362
7.5	0.1283	0.1385	0.1370	0.1361
10.0	0.1301	0.1386	0.1373	0.1365
15.0	0.1326	0.1389	0.1379	0.1374
17.0	0.1333	0.1390	0.1377	0.1377
20.0	0.1345	0.1407	0.1382	0.1380

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.1232	0.1564	0.1507	0.1477
0.5	0.1205	0.1450	0.1413	0.1389
0.8	0.1239	0.1466	0.1411	0.1391
1.0	0.1224	0.1405	0.1388	0.1366
1.2	0.1270	0.1478	0.1402	0.1381
1.5	0.1225	0.1347	0.1350	0.1338
2.0	0.1253	0.1410	0.1370	0.1364
2.5	0.1252	0.1348	0.1349	0.1338
3.0	0.1277	0.1391	0.1365	0.1345
3.5	0.1265	0.1332	0.1325	0.1336
4.0	0.1299	0.1397	0.1356	0.1358
5.0	0.1300	0.1356	0.1361	0.1352
7.5	0.1321	0.1366	0.1365	0.1357
10.0	0.1353	0.1387	0.1379	0.1379
15.0	0.1376	0.1395	0.1391	0.1393
17.0	0.1385	0.1402	0.1361	0.1398
20.0	0.1413	0.1498	0.1416	0.1396
(K/c)=	0.124	0.137	0.134	0.133



ω_0	B2	B3	B5
0,20	0,847981	0,851280	0,857353
0,50	0,583363	0,591956	0,607801
0,60	0,488988	0,499194	0,517967
0,70	0,391151	0,402783	0,424064
0,75	0,340613	0,352833	0,375082
0,80	0,288650	0,301306	0,324191
0,85	0,234734	0,247568	0,270526
0,90	0,177748	0,190246	0,212206
0,95	0,114428	0,125302	0,143802

Tableau I-7 - Valeurs de K_{∞}/c calculées (61) dans le cas du régime asymptotique. Les courbes correspondants au tracé de K_{∞}/c en fonction de ω_0 pour les fonctions de phase B3 et B5 sont présentées en figure I-3.



LEGENDE DES TABLEAUX I-8, 9, 10

Les trois tableaux suivants sont établis pour les ω_0 suivants :
 $\omega_0 = 0,70, 0,75, 0,80, 0,85, 0,90, 0,95$ pour chacune des fonctions de phase
 B2, B3 et B5. Ces tableaux ont été établis en supposant que l'équation I-30
 est vérifiée, c'est à dire :

$$A^-(\tau, \rho) = A^-(\tau) + \frac{\rho T'^2(\tau)}{1 - \rho A^-(\tau) A'(\tau)} \quad (\text{I-30a})$$

Les deux premières colonnes rappellent les valeurs de τ et $A^-(\tau)$. La fonction $A'(\tau)$ est calculée à l'aide de l'équation I-32 pour les couples (ρ_1, ρ_2) suivants : (0,10 ; 0,20), colonne 3 : (0,10 ; 0,25), colonne 4 et (0,20 ; 0,25), colonne 5. La moyenne des trois valeurs $A'(\tau)$ précédentes est donnée en colonne 6, et nous nous en servons pour déduire la fonction $T'^2(\tau)$ de la forme I-30a précédente, donc la valeur de $\frac{K'(\tau)}{c}$ (équation I-22b) donnée en dernière colonne. La valeur moyenne $\langle K'/c \rangle$ est donnée en complément.

Les valeurs pour lesquelles la précision des calculs n'est pas suffisante ne sont pas représentées.



FONCTION B2 P₁₀=0.70

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.3853	3.00	3.04	3.12	3.05	0.4619
0.5	0.5816	2.92	2.87	2.77	2.85	0.4530
0.8	0.8144	2.44	2.40	2.34	2.39	0.4435
1.0	0.9398	2.37	2.34	2.27	2.33	0.4391
1.2	1.0443	1.99	2.10	2.32	2.14	0.4352
1.5	1.1719	2.18	2.20	2.24	2.20	0.4307
2.0	1.3254	2.19	2.13	2.02	2.11	0.4247
2.5	1.4267	1.95	1.96	1.98	1.96	0.4200
3.0	1.4948	1.77	1.78	1.81	1.79	0.4163
3.5	1.5410	1.45	1.80	2.50	1.92	0.4135
4.0	1.5719	1.61	2.05	2.92	2.19	0.4110
5.0	1.6072	1.05	1.40	2.08	1.51	0.4071
7.5	1.6323					
10.0	1.6360					
15.0	1.6365					
17.0	1.6365					
20.0	1.6365					

(K/c)= 0.421

FONCTION B2 P₁₀=0.75

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.4257	3.04	3.07	3.14	3.08	0.3955
0.5	0.6523	2.95	2.92	2.85	2.91	0.3883
0.8	0.9298	2.47	2.50	2.55	2.50	0.3805
1.0	1.0832	2.47	2.49	2.53	2.49	0.3769
1.2	1.2152	2.37	2.35	2.32	2.35	0.3737
1.5	1.3804	2.16	2.16	2.17	2.16	0.3698
2.0	1.5883	2.12	2.05	1.91	2.03	0.3649
2.5	1.7348	2.08	2.02	1.91	2.01	0.3612
3.0	1.8393	1.98	1.97	1.94	1.97	0.3583
3.5	1.9123	1.61	1.76	2.05	1.81	0.3558
4.0	1.9655	1.79	1.97	2.33	2.03	0.3541
5.0	2.0293	1.25	1.49	1.97	1.57	0.3508
7.5	2.0842					
10.0	2.0941					
15.0	2.0962					
17.0	2.0962					
20.0	2.0964					

(K/c)= 0.359

FONCTION B2 P₁₀=0.80

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.4688	3.37	3.33	3.27	3.32	0.3289
0.5	0.7282	2.99	3.00	3.01	3.00	0.3228
0.8	1.0586	2.71	2.71	2.70	2.71	0.3167
1.0	1.2470	2.63	2.60	2.56	2.60	0.3138
1.2	1.4134	2.45	2.43	2.40	2.43	0.3112
1.5	1.6288	2.30	2.30	2.32	2.31	0.3082
2.0	1.9127	2.25	2.20	2.11	2.19	0.3043
2.5	2.1248	2.15	2.11	2.03	2.10	0.3014
3.0	2.2844	2.00	1.97	1.93	1.97	0.2991
3.5	2.4044	1.90	1.93	1.98	1.94	0.2973
4.0	2.4951	1.86	1.87	1.89	1.88	0.2958
5.0	2.6147	1.90	1.88	1.83	1.87	0.2935
7.5	2.7344	2.02	1.98	1.91	1.97	0.2902
10.0	2.7637	1.59	1.73	1.99	1.77	0.2884
15.0	2.7727					
17.0	2.7730					
20.0	2.7732					

(K/c)= 0.297



FONCTION B2 $\text{Pio}=0.85$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.5140	3.37	3.39	3.41	3.39	0.2613
0.5	0.8110	3.11	3.09	3.05	3.08	0.2565
0.8	1.2035	2.70	2.74	2.83	2.76	0.2517
1.0	1.4355	2.61	2.61	2.62	2.61	0.2494
1.2	1.6464	2.54	2.53	2.52	2.53	0.2476
1.5	1.9278	2.34	2.37	2.41	2.38	0.2452
2.0	2.3188	2.20	2.20	2.20	2.20	0.2423
2.5	2.6306	2.05	2.07	2.09	2.07	0.2402
3.0	2.8794	1.96	1.98	2.00	1.98	0.2385
3.5	3.0779	1.94	1.95	1.98	1.96	0.2372
4.0	3.2372	1.91	1.91	1.90	1.91	0.2362
5.0	3.4655	1.75	1.75	1.75	1.75	0.2345
7.5	3.7394	1.80	1.76	1.68	1.75	0.2324
10.0	3.8281	2.46	2.29	1.97	2.24	0.2318
15.0	3.8658	2.56	1.38	-1.03	1.97	0.2318
17.0	3.8687					0.2308
20.0	3.8700					

(K'/c) = 0.235

FONCTION B2 $\text{Pio}=0.90$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.5632	3.48	3.48	3.49	3.48	0.1930
0.5	0.9035	3.19	3.19	3.19	3.19	0.1893
0.8	1.3722	2.90	2.89	2.88	2.89	0.1857
1.0	1.6600	2.76	2.76	2.76	2.76	0.1840
1.2	1.9294	2.64	2.64	2.64	2.64	0.1826
1.5	2.3023	2.50	2.50	2.50	2.50	0.1809
2.0	2.8488	2.33	2.33	2.32	2.33	0.1789
2.5	3.3148	2.20	2.19	2.19	2.19	0.1773
3.0	3.7120	2.10	2.10	2.11	2.10	0.1762
3.5	4.0507	2.03	2.04	2.04	2.04	0.1753
4.0	4.3391	1.96	1.96	1.97	1.96	0.1746
5.0	4.7943	1.88	1.88	1.87	1.88	0.1736
7.5	5.4545	1.72	1.74	1.77	1.74	0.1724
10.0	5.7448	1.75	1.73	1.69	1.72	0.1721
15.0	5.9246	1.44	1.49	1.61	1.51	0.1723
17.0	5.9445	1.37	1.43	1.56	1.45	0.1726
20.0	5.9572	1.02	1.19	1.52	1.24	0.1728

(K'/c) = 0.172

FONCTION B2 $\text{Pio}=0.95$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.6135	3.64	3.64	3.62	3.63	0.1240
0.5	1.0035	3.36	3.35	3.35	3.35	0.1212
0.8	1.5645	3.07	3.07	3.07	3.07	0.1184
1.0	1.9236	2.94	2.93	2.93	2.93	0.1171
1.2	2.2709	2.81	2.81	2.81	2.81	0.1160
1.5	2.7710	2.67	2.67	2.67	2.67	0.1148
2.0	3.5507	2.48	2.48	2.48	2.48	0.1132
2.5	4.2672	2.34	2.34	2.34	2.34	0.1121
3.0	4.9247	2.23	2.23	2.22	2.22	0.1112
3.5	5.5273	2.14	2.13	2.13	2.13	0.1106
4.0	6.0789	2.06	2.06	2.06	2.06	0.1101
5.0	7.0436	1.94	1.94	1.94	1.94	0.1094
7.5	8.7972	1.76	1.76	1.76	1.76	0.1087
10.0	9.8762	1.66	1.66	1.66	1.66	0.1087
15.0	10.9123	1.58	1.58	1.57	1.58	0.1092
17.0	11.1024	1.56	1.55	1.55	1.55	0.1094
20.0	11.2696	1.50	1.52	1.54	1.53	0.1098

(K'/c) = 0.105



Tableau I-9a

FONCTION B3 $Pi_0=0.70$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.5659	2.50	2.53	2.60	2.54	0.4718
0.5	0.8545	2.40	2.43	2.50	2.45	0.4630
0.8	1.1965	2.17	2.14	2.09	2.14	0.4536
1.0	1.3777	2.19	2.11	1.96	2.09	0.4492
1.2	1.5289	1.91	1.90	1.87	1.89	0.4451
1.5	1.7132	1.82	1.88	1.99	1.90	0.4406
2.0	1.9316	1.69	1.80	2.02	1.84	0.4347
2.5	2.0760	1.49	1.60	1.83	1.64	0.4301
3.0	2.1715	1.85	1.85	1.85	1.85	0.4267
3.5	2.2343	1.72	1.72	1.72	1.72	0.4237
4.0	2.2768	1.81	1.58	1.11	1.50	0.4212
5.0	2.3239	0.03	1.07	3.12	1.41	0.4174
7.5	2.3571					
10.0	2.3617					
15.0	2.3625					
17.0	2.3625					
20.0	2.3625					

(K/c)= 0.431

FONCTION B3 $Pi_0=0.75$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.6273	2.71	2.70	2.70	2.70	0.4064
0.5	0.9592	2.40	2.42	2.47	2.43	0.3987
0.8	1.3664	2.18	2.18	2.20	2.19	0.3911
1.0	1.5892	1.99	2.03	2.12	2.05	0.3873
1.2	1.7809	2.02	2.03	2.05	2.03	0.3843
1.5	2.0190	1.92	1.92	1.93	1.92	0.3804
2.0	2.3169	1.85	1.85	1.86	1.85	0.3756
2.5	2.5238	1.75	1.81	1.94	1.83	0.3720
3.0	2.6684	1.65	1.62	1.58	1.62	0.3689
3.5	2.7710	1.63	1.71	1.87	1.74	0.3668
4.0	2.8429	1.60	1.78	2.13	1.84	0.3650
5.0	2.9284	0.85	1.09	1.57	1.17	0.3615
7.5	2.9993					
10.0	3.0115					
15.0	3.0138					
17.0	3.0138					
20.0	3.0138					

(K/c)= 0.370

FONCTION B3 $Pi_0=0.80$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.6884	2.71	2.71	2.71	2.71	0.3400
0.5	1.0694	2.58	2.56	2.52	2.55	0.3341
0.8	1.5511	2.27	2.27	2.26	2.27	0.3278
1.0	1.8243	2.12	2.13	2.15	2.13	0.3247
1.2	2.0654	2.07	2.07	2.06	2.07	0.3222
1.5	2.3749	2.03	2.02	2.00	2.01	0.3193
2.0	2.7796	1.88	1.87	1.87	1.87	0.3154
2.5	3.0788	1.79	1.77	1.75	1.77	0.3125
3.0	3.3007	1.75	1.74	1.73	1.74	0.3103
3.5	3.4658	1.69	1.68	1.66	1.67	0.3086
4.0	3.5885	1.64	1.67	1.72	1.67	0.3072
5.0	3.7478	1.58	1.53	1.44	1.51	0.3048
7.5	3.9021	1.23	1.37	1.64	1.41	0.3017
10.0	3.9378	1.70	2.39	3.73	2.61	0.3009
15.0	3.9478					
17.0	3.9482					
20.0	3.9482					

(K/c)= 0.309



FONCTION B3 $Pi_0=0.85$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.7547	2.95	2.91	2.83	2.89	0.2735
0.5	1.1889	2.63	2.61	2.58	2.61	0.2684
0.8	1.7605	10.81	8.00	2.34	7.05	0.2763
1.0	2.0960	2.31	2.29	2.26	2.29	0.2613
1.2	2.4001	2.19	2.18	2.17	2.18	0.2593
1.5	2.8031	2.06	2.06	2.06	2.06	0.2569
2.0	3.3578	1.93	1.93	1.92	1.93	0.2539
2.5	3.7948	1.85	1.85	1.85	1.85	0.2518
3.0	4.1390	1.76	1.78	1.80	1.78	0.2502
3.5	4.4102	1.69	1.72	1.77	1.73	0.2489
4.0	4.6252	1.63	1.68	1.77	1.69	0.2479
5.0	4.9284	1.66	1.63	1.56	1.62	0.2464
7.5	5.2768	1.64	1.63	1.63	1.63	0.2444
10.0	5.3828	1.01	0.99	0.93	0.98	0.2432
15.0	5.4250	0.36	0.39	0.46	0.40	0.2425
17.0	5.4275					
20.0	5.4275					

(K/c)= 0.247

FONCTION B3 $Pi_0=0.90$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.8331	2.85	2.86	2.87	2.86	0.2054
0.5	1.3346	2.63	2.65	2.67	2.65	0.2016
0.8	2.0209	2.42	2.43	2.44	2.43	0.1979
1.0	2.4389	2.35	2.34	2.32	2.34	0.1961
1.2	2.8280	2.22	2.23	2.26	2.24	0.1946
1.5	3.3638	2.19	2.16	2.11	2.15	0.1929
2.0	4.1397	1.97	1.99	2.02	1.99	0.1907
2.5	4.7932	1.91	1.91	1.92	1.91	0.1892
3.0	5.3423	1.81	1.82	1.83	1.82	0.1880
3.5	5.8047	1.77	1.77	1.77	1.77	0.1871
4.0	6.1928	1.72	1.72	1.71	1.72	0.1864
5.0	6.7944	1.62	1.63	1.63	1.63	0.1854
7.5	7.6316	1.57	1.62	1.72	1.64	0.1845
10.0	7.9758	1.79	1.62	1.29	1.57	0.1842
15.0	8.1723	3.30	3.13	2.81	3.08	0.1856
17.0	8.1912	2.37	2.18	1.81	2.12	0.1853
20.0	8.2030					

(K/c)= 0.184

FONCTION B3 $Pi_0=0.95$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.9002	3.00	3.00	3.01	3.00	0.1373
0.5	1.4689	2.79	2.79	2.79	2.79	0.1342
0.8	2.2811	2.57	2.57	2.57	2.57	0.1311
1.0	2.7970	2.46	2.46	2.46	2.46	0.1297
1.2	3.2934	2.37	2.37	2.37	2.37	0.1285
1.5	4.0030	2.26	2.26	2.26	2.26	0.1271
2.0	5.0975	2.12	2.12	2.12	2.12	0.1253
2.5	6.0896	2.01	2.01	2.01	2.01	0.1241
3.0	6.9880	1.92	1.92	1.92	1.92	0.1231
3.5	7.8005	1.85	1.85	1.85	1.85	0.1224
4.0	8.5347	1.79	1.79	1.79	1.79	0.1218
5.0	9.7943	1.70	1.70	1.70	1.70	0.1210
7.5	11.9893	1.57	1.57	1.57	1.57	0.1201
10.0	13.2583	1.49	1.49	1.50	1.50	0.1200
15.0	14.3799	1.44	1.44	1.44	1.44	0.1204
17.0	14.5675	1.42	1.43	1.44	1.43	0.1207
20.0	14.7235	1.38	1.40	1.42	1.40	0.1211

(K/c)= 0.117



Tableau I-10a

FONCTION B5 $Pi_0=0.70$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.9111	2.21	2.24	2.31	2.25	0.4905
0.5	1.3727	2.02	2.05	2.12	2.06	0.4812
0.8	1.9155	1.85	1.84	1.81	1.83	0.4718
1.0	2.2014	1.83	1.81	1.77	1.80	0.4674
1.2	2.4389	1.73	1.73	1.73	1.73	0.4636
1.5	2.7239	1.68	1.65	1.59	1.64	0.4589
2.0	3.0586	1.59	1.65	1.77	1.67	0.4533
2.5	3.2737	1.57	1.49	1.34	1.46	0.4486
3.0	3.4143	1.67	1.67	1.67	1.67	0.4455
3.5	3.5055	1.43	1.45	1.51	1.46	0.4425
4.0	3.5654	1.69	1.72	1.79	1.73	0.4405
5.0	3.6300	1.03	1.25	1.68	1.32	0.4367
7.5	3.6729					
10.0	3.6781					
15.0	3.6787					
17.0	3.6787					
20.0	3.6787					

(K/c) = 0.450

FONCTION B5 $Pi_0=0.75$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	0.9993	2.30	2.27	2.21	2.26	0.4260
0.5	1.5249	2.10	2.10	2.12	2.11	0.4183
0.8	2.1654	1.96	1.94	1.89	1.93	0.4106
1.0	2.5130	1.83	1.83	1.82	1.83	0.4067
1.2	2.8096	1.80	1.79	1.76	1.78	0.4037
1.5	3.1754	1.72	1.71	1.70	1.71	0.3999
2.0	3.6249	1.63	1.61	1.58	1.61	0.3950
2.5	3.9320	1.47	1.55	1.70	1.57	0.3915
3.0	4.1424	1.47	1.41	1.29	1.39	0.3885
3.5	4.2883	1.69	1.60	1.43	1.57	0.3867
4.0	4.3877	1.48	1.50	1.54	1.51	0.3848
5.0	4.5048	1.51	1.55	1.64	1.57	0.3822
7.5	4.5947					
10.0	4.6090					
15.0	4.6116					
17.0	4.6116					
20.0	4.6116					

(K/c) = 0.390

FONCTION B5 $Pi_0=0.80$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	1.0977	2.30	2.29	2.27	2.29	0.3610
0.5	1.6989	2.12	2.12	2.12	2.12	0.3545
0.8	2.4567	1.96	1.96	1.95	1.96	0.3482
1.0	2.8824	1.86	1.87	1.90	1.87	0.3451
1.2	3.2549	1.84	1.82	1.78	1.81	0.3427
1.5	3.7280	1.74	1.73	1.72	1.73	0.3395
2.0	4.3385	1.66	1.66	1.65	1.66	0.3358
2.5	4.7804	1.60	1.60	1.62	1.61	0.3330
3.0	5.1016	1.53	1.54	1.56	1.54	0.3308
3.5	5.3359	1.52	1.53	1.55	1.53	0.3292
4.0	5.5062	1.49	1.48	1.45	1.47	0.3277
5.0	5.7215	1.52	1.47	1.36	1.45	0.3258
7.5	5.9153	1.43	1.24	0.87	1.18	0.3227
10.0	5.9556					
15.0	5.9655					
17.0	5.9657					
20.0	5.9657					

(K/c) = 0.330



FONCTION B5 $PI_0=0.85$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	1.2009	2.37	2.36	2.36	2.36	0.2953
0.5	1.8873	2.19	2.19	2.19	2.19	0.2901
0.8	2.7832	2.02	2.02	2.02	2.02	0.2850
1.0	3.3042	1.94	1.94	1.93	1.94	0.2825
1.2	3.7723	1.87	1.87	1.87	1.87	0.2804
1.5	4.3878	1.79	1.79	1.79	1.79	0.2780
2.0	5.2213	1.70	1.70	1.70	1.70	0.2750
2.5	5.8640	1.62	1.62	1.63	1.62	0.2729
3.0	6.3605	1.58	1.58	1.58	1.58	0.2713
3.5	6.7442	1.54	1.54	1.53	1.54	0.2700
4.0	7.0407	1.51	1.51	1.51	1.51	0.2690
5.0	7.4471	1.47	1.47	1.47	1.47	0.2676
7.5	7.8830	1.44	1.44	1.43	1.43	0.2659
10.0	8.0019	1.44	1.46	1.50	1.47	0.2655
15.0	8.0426					
20.0	8.0446					
30.0	8.0454					

(K'/c)= 0.269

FONCTION B5 $PI_0=0.90$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	1.3106	2.43	2.43	2.43	2.43	0.2290
0.5	2.0933	2.26	2.26	2.26	2.26	0.2247
0.8	3.1548	2.09	2.09	2.08	2.09	0.2204
1.0	3.7955	2.00	2.00	2.00	2.00	0.2184
1.2	4.3879	1.94	1.94	1.94	1.94	0.2168
1.5	5.1945	1.85	1.85	1.85	1.85	0.2148
2.0	6.3473	1.75	1.75	1.75	1.75	0.2124
2.5	7.2979	1.67	1.67	1.67	1.67	0.2107
3.0	8.0816	1.62	1.62	1.61	1.61	0.2094
3.5	8.7278	1.57	1.57	1.57	1.57	0.2085
4.0	9.2601	1.54	1.54	1.53	1.53	0.2077
5.0	10.0589	1.47	1.48	1.49	1.48	0.2067
7.5	11.0971	1.41	1.41	1.42	1.41	0.2057
10.0	11.4802	1.36	1.37	1.38	1.37	0.2056
15.0	11.6695	1.00	1.18	1.52	1.23	0.2061
20.0	11.6851	1.85	1.77	1.61	1.74	0.2069
30.0	11.6937					

(K'/c)= 0.206

FONCTION B5 $PI_0=0.95$

Tau	A(Tau)	A'(Tau) (10-20)	A'(Tau) (10-25)	A'(Tau) (20-25)	(A')	K'/c
0.3	1.4131	2.38	2.43	2.53	2.45	0.1622
0.5	2.2800	2.12	2.22	2.42	2.25	0.1571
0.8	3.5374	2.27	2.26	2.24	2.26	0.1549
1.0	4.3160	2.01	2.08	2.23	2.11	0.1527
1.2	5.0845	2.29	2.26	2.20	2.25	0.1527
1.5	6.1291	1.86	1.93	2.07	1.95	0.1494
2.0	7.7430	1.98	1.91	1.79	1.89	0.1478
2.5	9.1655	1.66	1.69	1.75	1.70	0.1455
3.0	10.4438	1.69	1.75	1.88	1.77	0.1450
3.5	11.5588	1.58	1.56	1.53	1.56	0.1431
4.0	12.5660	1.76	1.63	1.38	1.59	0.1429
5.0	14.2290	1.49	1.47	1.44	1.47	0.1416
7.5	16.9363	1.28	1.39	1.60	1.43	0.1402
10.0	18.3580	1.39	1.42	1.49	1.44	0.1399
15.0	19.4573	1.52	1.41	1.18	1.37	0.1397
20.0	19.6154	2.24	1.44	-0.27	1.84	0.1402
30.0	19.7375	4.27	3.18	0.91	2.79	0.1416

(K'/c)= 0.139



LEGENDE DU TABLEAU I-11

Ce tableau se rapporte à des calculs effectués par les O.S.D., pour la fonction de phase B3, et $\omega_0 = 0,6 ; 0,7 ; 0,8$ et $0,9$. L'étude est la même que celle des tableaux I-4, 5, 6, deuxième colonne.

LEGENDE DU TABLEAU I-12

Ce tableau se rapporte à des calculs effectués par les O.S.D., pour la fonction de phase B5, et $\omega_0 = 0,6 ; 0,7 ; 0,8$ et $0,9$. L'étude est la même que celle des tableaux I-4, 5, 6, deuxième colonne.

Fonction K3

OSD.

Tau	Pio=0.6	Pio=0.7	Pio=0.8	Pio=0.9
0.3	0.2017	0.2438	0.2894	0.3389
0.5	0.3099	0.3827	0.4649	0.5588
0.8	0.4397	0.5592	0.7015	0.8757
1.0	0.5085	0.6581	0.8423	1.0772
1.2	0.5656	0.7440	0.9707	1.2707
1.5	0.6336	0.8518	1.1413	1.5451
2.0	0.7118	0.9869	1.3749	1.9610
2.5	0.7604	1.0803	1.5559	2.3234
3.0	0.7906	1.1448	1.6958	2.6480
3.5	0.8093	1.1892	1.8028	2.9248
4.0	0.8208	1.2196	1.8846	3.1605
5.0	0.8321	1.2545	1.9944	3.5416
7.5	0.8382	1.2799	2.1058	4.1025
10.0	0.8386	1.2832	2.1325	4.3436
15.0	0.8387	1.2837	2.1395	4.4902
17.0	0.8387	1.2837	2.1397	4.5055
20.0	0.8387	1.2837	2.1397	4.5064
50.0	0.8384	1.2836	2.1409	4.5151

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.4586	0.3511	0.2421	0.1300
0.5	0.4614	0.3540	0.2448	0.1321
0.8	0.4645	0.3576	0.2481	0.1348
1.0	0.4663	0.3594	0.2500	0.1363
1.2	0.4678	0.3611	0.2517	0.1377
1.5	0.4698	0.3632	0.2539	0.1396
2.0	0.4725	0.3662	0.2569	0.1424
2.5	0.4749	0.3685	0.2595	0.1445
3.0	0.4773	0.3707	0.2618	0.1472
3.5	0.4799	0.3728	0.2637	0.1491
4.0	0.4827	0.3748	0.2653	0.1505
5.0	0.4885	0.3787	0.2682	0.1534
7.5		0.3899	0.2741	0.1595
10.0			0.2769	0.1635
15.0				0.1734
17.0				0.1808
20.0				

(K/c)= 0.466 0.363 0.258 0.152

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.4586	0.3511	0.2421	0.1300
0.5	0.4656	0.3585	0.2490	0.1352
0.8	0.4697	0.3634	0.2536	0.1392
1.0	0.4735	0.3670	0.2573	0.1424
1.2	0.4751	0.3693	0.2603	0.1448
1.5	0.4778	0.3714	0.2626	0.1473
2.0	0.4809	0.3752	0.2662	0.1509
2.5	0.4841	0.3780	0.2696	0.1530
3.0	0.4894	0.3816	0.2733	0.1603
3.5	0.4958	0.3855	0.2750	0.1605
4.0	0.5019	0.3887	0.2770	0.1604
5.0	0.5116	0.3941	0.2797	0.1652
7.5		0.4125	0.2858	0.1717
10.0			0.2855	0.1755
15.0				0.1930
17.0				0.2370
20.0				

(K/c)= 0.466 0.363 0.258 0.152



Fonction B5 OSI.

Tau	Pi0=0.6	Pi0=0.7	Pi0=0.8	Pi0=0.9
0.3	0.3235	0.3916	0.4654	0.5462
0.5	0.4965	0.6142	0.7476	0.9013
0.8	0.7028	0.8952	1.1260	1.4118
1.0	0.8112	1.0514	1.3495	1.7348
1.2	0.9007	1.1862	1.5522	2.0433
1.5	1.0062	1.3540	1.8190	2.4773
2.0	1.1260	1.5607	2.1786	3.1262
2.5	1.1991	1.7011	2.4513	3.6852
3.0	1.2436	1.7959	2.6571	4.1627
3.5	1.2706	1.8597	2.8121	4.5686
4.0	1.2869	1.9025	2.9274	4.9101
5.0	1.3026	1.9503	3.0771	5.4366
7.5	1.3105	1.9829	3.2193	6.1514
10.0	1.3112	1.9864	3.2484	6.4286
15.0	1.3110	1.9872	3.2544	6.5642
17.0	1.3112	1.9872	3.2552	6.5734
20.0	1.3113	1.9873	3.2553	6.5760
50.0	1.3106	1.9866	3.2553	6.5808

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau=0/Tau(i)

0.3	0.4724	0.3659	0.2571	0.1444
0.5	0.4762	0.3698	0.2609	0.1473
0.8	0.4803	0.3744	0.2653	0.1509
1.0	0.4824	0.3767	0.2677	0.1530
1.2	0.4843	0.3788	0.2699	0.1549
1.5	0.4866	0.3814	0.2727	0.1574
2.0	0.4900	0.3850	0.2766	0.1611
2.5	0.4928	0.3880	0.2797	0.1642
3.0	0.4956	0.3906	0.2824	0.1669
3.5	0.4985	0.3930	0.2849	0.1693
4.0	0.5016	0.3953	0.2869	0.1714
5.0	0.5099	0.4002	0.2905	0.1749
7.5		0.4184	0.3003	0.1820
10.0			0.3075	0.1883
15.0				0.1994
17.0				0.1998
20.0				

(K/c)= 0.483 0.381 0.278 0.171

(K/c)=f(Tau) calculee sur la couche Tau(i-1)/Tau(i)

0.3	0.4724	0.3659	0.2571	0.1444
0.5	0.4818	0.3757	0.2666	0.1516
0.8	0.4870	0.3819	0.2726	0.1570
1.0	0.4911	0.3861	0.2772	0.1613
1.2	0.4935	0.3891	0.2811	0.1644
1.5	0.4961	0.3921	0.2840	0.1676
2.0	0.5002	0.3956	0.2882	0.1721
2.5	0.5042	0.4000	0.2921	0.1765
3.0	0.5093	0.4035	0.2957	0.1802
3.5	0.5158	0.4073	0.2999	0.1838
4.0	0.5234	0.4114	0.3013	0.1860
5.0	0.5430	0.4201	0.3049	0.1893
7.5		0.4548	0.3200	0.1960
10.0			0.3291	0.2074
15.0				0.2216
17.0				0.2027
20.0				

(K/c)= 0.483 0.381 0.278 0.171

