

N° d'ordre 470

50376
1974
78

50376
1974
78

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ

par

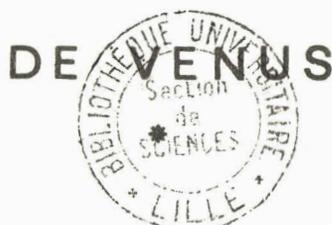
DEUZE Jean-Luc



ETUDE DE LA POLARISATION

DU RAYONNEMENT PAR LES MILIEUX DIFFUSANTS

APPLICATION A LA POLARISATION LOCALISEE



Soutenue le 11 juillet 1974 devant la Commission d'examen

Membres du Jury

M.	J. SCHILTZ	Président
M.	M. HERMAN	Rapporteur
Mme	J. LENOBLE	Examineur
M.	A. DOLLFUS	Membre invité

A ma Femme.

A mes Parents.

Ce travail a été effectué sous la direction de Monsieur HERMAN, maître de conférences, au Laboratoire d'Optique Atmosphérique de Lille dirigé par Madame LENOBLE, professeur.

Que tous deux reçoivent ici l'expression de mes sentiments de profonde gratitude.

Je tiens à remercier Monsieur le professeur SCHILTZ qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury, ainsi que Madame LENOBLE et Monsieur DOLLFUS qui ont accepté de juger mon travail.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur DEVAUX pour sa précieuse collaboration sans laquelle ce travail n'aurait été possible.

Que Monsieur GONZALES, dont l'aide m'a été précieuse pour les problèmes numériques, et les membres du personnel technique de l'U.E.R. de Physique qui ont participé à ce travail, trouvent ici l'expression de mes remerciements.

CHAPITRE I - RAPPELS

- I - Définitions
- II - Paramètres de STOKES et de KUSCER
- III - Equation de transfert dans le formalisme de KUSCER
- IV - Retour aux paramètres de STOKES

CHAPITRE II - RESOLUTION DE L'EQUATION DE TRANSFERT PAR LA METHODE DES HARMONIQUES SPHERIQUES DANS LE CAS D'UNE INCIDENCE NORMALE

- I - Introduction
- II - Calcul exact par les Harmoniques sphériques
- III - Méthode d'approximations successives
- IV - Résultats
 - 1) Cas étudiés
 - 2) Luminance totale
 - 3) Luminance polarisée
 - 4) Saturation de $Q(o;\mu)$ en fonction de l'épaisseur τ_1 de la couche
 - 5) Conclusion

CHAPITRE III - EXTENSION THEORIQUE DE LA METHODE DES HARMONIQUES SPHERIQUES EN INCIDENCE OBLIQUE

- I - Méthode rigoureuse
- II - Méthode approchée
 - 1) Première itération
 - 2) Seconde itération
 - 3) Calcul des racines
- III - Conclusion

CHAPITRE IV - METHODE DES ORDRES SUCCESSIFS DE DIFFUSION

- I - Principe de la méthode
- II - Méthode d'intégration
 - a) Intégration sur μ
 - b) Intégration sur τ
- III - Longueur du développement en série de FOURIER

IV - Nombre de diffusions

a) Influence de l'albédo

b) Influence du paramètre de STOCKES étudié

c) Influence de la valeur de s et de l'incidence μ_0

V - Choix des grandeurs physiques étudiées

VI - Etude des hypothèses de calcul du chapitre III

CHAPITRE V - ETUDE DE LA POLARISATION LOCALISEE DE VENUS

I - Adaptation de la méthode de calcul

II - Géométrie du problème

III - Répartition sur le disque

IV - Organisation du calcul

V - Variation avec l'albédo

VI - Diffusion Rayleigh

VII - Résultats

1) Variation avec l'angle de phase

2) Influence de l'albédo

3) Influence de la diffusion Rayleigh

4) Comparaison aux mesures

5) Polarisation intégrée

VIII - Conclusion

INTRODUCTION

On a étudié la formation du rayonnement polarisé dans un milieu diffusant. Le modèle utilisé est celui d'une couche plane et parallèle, qui constitue une bonne approximation pour des atmosphères planétaires stratifiées et optiquement denses. Nous nous limiterons dans les applications au rayonnement réfléchi par une telle couche, en envisageant plus particulièrement l'analyse de la lumière solaire réfléchie par Vénus.

Les diverses méthodes de résolution de l'équation de transfert conduisent en général à de très longs calculs même lorsqu'on néglige la polarisation. Dans cette approximation, la méthode des harmoniques sphériques {DEVAUX} semble une des plus performantes ; il paraît difficile de l'utiliser sous sa forme générale développée par KUSCER de façon théorique. Nous avons donc essayé de l'adapter et dans un premier temps, nous nous placerons en incidence normale où le problème est plus simple, compte-tenu de la symétrie. A partir de la méthode rigoureuse des harmoniques sphériques, nous développerons une méthode d'approximations successives et montrerons qu'elle peut s'étendre au cas d'une incidence oblique. Ses possibilités théoriques semblant toutefois relativement restreintes, et aussi pour disposer, aux fins de comparaison, d'un calcul exact, nous avons étudié la méthode des ordres successifs de diffusion. Dans un dernier chapitre nous montrerons comment utiliser cette dernière méthode pour étudier la polarisation localisée de Vénus et nous présenterons les premiers résultats obtenus.

CHAPITRE I

RAPPELS

I - DEFINITIONS

La grandeur de base est la luminance énergétique monochromatique ($W.m^{-3}.st^{-1}$). Le rayonnement polarisé dépendra de quatre paramètres que l'on précisera par la suite, donnant par exemple l'éclairement, le taux de polarisation, la direction et la forme de la vibration polarisée ; sa luminance sera donc représentée par une matrice colonne de dimension quatre, $L_{\nu}(M; \vec{s})$, fonction du point M et de la direction \vec{s} .

Un faisceau parallèle, de polarisation quelconque et défini par sa matrice éclairement $E_{\nu 0}$, subit, dans une traversée d'épaisseur ds du milieu, des pertes $dE_{\nu a}$ par absorption et $dE_{\nu d}$ par diffusion. On définit :

$$\begin{aligned} \text{un coefficient d'absorption } b(m^{-1}) &: dE_{\nu a} = - b ds E_{\nu 0} \\ \text{un coefficient de diffusion } k(m^{-1}) &: dE_{\nu d} = - k ds E_{\nu 0} \end{aligned}$$

et note $K(M) = k(M) + b(M)$ le coefficient total d'absorption
 $\omega_0(M) = k(M)/K(M)$ l'albédo pour une diffusion simple.

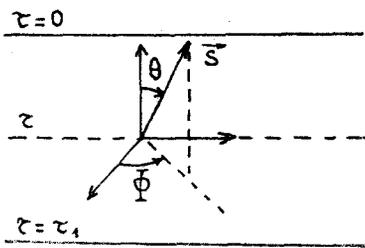
La matrice de phase $P_{\nu}(M; \vec{s}, \vec{s}')$, de dimension 4 x 4, caractérise la luminance diffusée dans une direction \vec{s}' , par un élément dv de volume diffusant placé en M et recevant dans la direction \vec{s} , un faisceau parallèle, de matrice éclairement $E_{\nu 0}$

$$L_{\nu}(M, \vec{s}) = \frac{k dv}{4\pi A} P_{\nu}(M; \vec{s}, \vec{s}') E_{\nu 0}(M; \vec{s}) \tag{I-1}$$

où A est la section apparente de dv dans la direction \vec{s}' .

Nous nous limiterons en principe au cas d'une couche homogène, limitée par deux plans parallèles et infinis, uniformément éclairée sur sa face supérieure par un faisceau parallèle. L'équation de transfert prend alors la forme classique :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I_{\nu}(\tau; \mu, \phi)}{\partial \tau} &= I_{\nu}(\tau; \mu, \phi) - \frac{\omega_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} P_{\nu}(\mu, \phi; \mu', \phi') I_{\nu}(\tau; \mu', \phi') d\mu' d\phi' \\ &- \frac{\omega_0}{4\pi} P_{\nu}(\mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \pi F_{\nu} e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \tag{I-2}$$



où θ et ϕ repèrent la direction de propagation \vec{s} respectivement par rapport à la verticale ascendante et à un axe origine arbitraire dans le plan horizontal. On posera par commodité $\mu = \cos\theta$. Les variables μ_0 et ϕ_0 repèrent le faisceau incident de matrice éclairement πF .

Pour des milieux homogènes, la profondeur optique est définie par $\tau = (k+b)h$, où h est la profondeur géométrique dans la couche.

II - PARAMETRES DE STOKES ET DE KUSCER

Considérons une onde plane monochromatique, partiellement polarisée, en propagation suivant une direction oz . Dans le formalisme de Stokes, le vecteur champ électrique est décomposé dans la plan perpendiculaire à oz , en 2 vibrations rectilignes \vec{e}_l et \vec{e}_r [1]

$$\vec{E} = \text{Re} (E_l \vec{e}_l + E_r \vec{e}_r), \quad (I-3)$$

et on associe au faisceau la matrice colonne

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \frac{1}{2} c e \epsilon_0 \begin{bmatrix} \overline{E_l E_l^*} + \overline{E_r E_r^*} \\ \overline{E_l E_l^*} - \overline{E_r E_r^*} \\ \overline{E_l E_r^*} + \overline{E_r E_l^*} \\ \overline{E_l E_r^*} - \overline{E_r E_l^*} \end{bmatrix} \quad (I-4)$$

Les quantités $\overline{E_i E_j^*}$ désignent les moyennes dans le temps, et E_i^* est la quantité complexe conjuguée de E_i .

Kuscser [2] a montré les simplifications importantes apportées à la résolution de l'équation de transfert si l'on décompose le champ sous la forme

$$\vec{E} = \text{Re}(E_+ \vec{e}_+ + E_- \vec{e}_-) \quad (I-5)$$

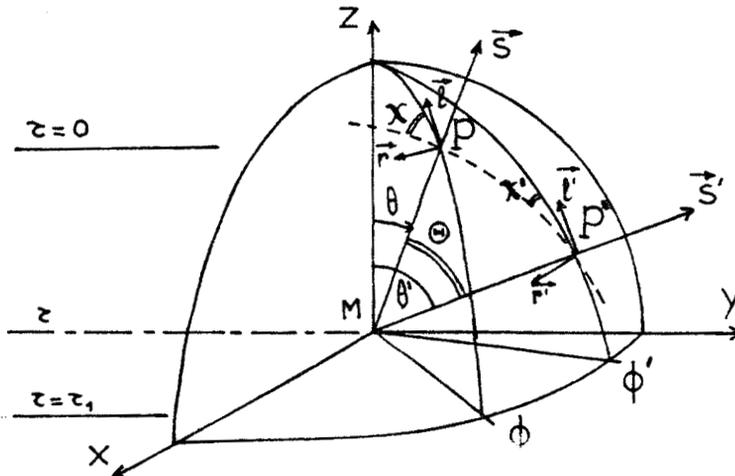
où \vec{e}_+ et \vec{e}_- sont deux vibrations circulaires inverses et unitaires.

On peut ainsi définir une nouvelle matrice éclairément :

$$\begin{aligned}
 \vec{L} = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_0 \\ I_{-0} \\ I_{-2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} c \epsilon \epsilon_0 \begin{bmatrix} E_+ E_-^* \\ E_+ E_+^* \\ E_- E_-^* \\ E_- E_+^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q-iU \\ I-V \\ I+V \\ Q+iU \end{bmatrix} \quad (I-6)
 \end{aligned}$$

où les indices $m = \pm 0$ et ± 2 indiquent que dans une rotation des axes (\vec{r}, \vec{r}') d'un angle ψ , les différents paramètres sont simplement multipliés par $e^{im\psi}$, comme on le verra. La forme de $\vec{L}(\theta)$ dépend évidemment du choix de la décomposition.

III - EQUATION DE TRANSFERT DANS LE FORMALISME DE KUSCER



La luminance diffuse $L(M, \vec{s}')$ sera définie par rapport aux vecteurs unitaires \vec{l}' et \vec{r}' respectivement parallèle et perpendiculaire au plan méridien contenant la direction \vec{s}' de propagation.

Par contre la matrice de phase $\vec{L}(\theta)$ est en général définie, à partir de la diffusion primaire, par rapport à deux vecteurs respectivement parallèle et perpendiculaire au plan de diffusion.

Pour appliquer la matrice de diffusion $\vec{L}(\theta)$ sur le rayonnement incident $L(M, \vec{s}')$ dans (I-2) il est donc nécessaire de faire tourner les vecteurs \vec{l}' et \vec{r}' d'un angle χ' autour de \vec{s}' . De la même façon, pour ramener le rayonnement diffusé $L(M, \vec{s})$ aux axes \vec{l} et \vec{r} , il faudra effectuer une rota-

tion d'angle $-\chi$ autour de l'axe \vec{s} .

L'intérêt du formalisme de Kuscer est que les matrices de rotation $R(\chi)$ s'y expriment très simplement, à savoir :

$$\tilde{R}(\chi) = \begin{bmatrix} e^{2i\chi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2i\chi} \end{bmatrix} \quad (I-7)$$

avec de plus la relation $\tilde{R}^{-1}(\chi) = \tilde{R}(-\chi)$

L'équation (I-2) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}_{\tilde{K}}(\tau; \mu, \phi) &= \tilde{L}_{\tilde{K}}(\tau; \mu, \phi) - \frac{\omega_0}{4} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \tilde{R}^{-1}(\chi) \tilde{P}_{\tilde{K}}(\theta) \tilde{R}(\chi') \tilde{L}_{\tilde{K}}(\tau; \mu', \phi') du' d\phi' \\ &- \frac{\omega_0}{4} e^{\tau/\mu_0} \tilde{R}^{-1}(\chi) \tilde{P}_{\tilde{K}}(\theta_0) \tilde{R}(\chi_0) \tilde{F}_{\tilde{K}} \end{aligned} \quad (I-8)$$

On peut alors séparer les variables θ et ϕ si les éléments p_{mn} de la matrice $\tilde{P}_{\tilde{K}}(\theta)$ sont développés sous la forme :

$$p_{mn}(\cos\theta) = \sum_{\ell=\sup(|m|, |n|)}^{\ell=\infty} \beta_{mn}^{\ell} P_{mn}^{\ell}(\cos\theta) \quad (I-9)$$

où les $P_{mn}^{\ell}(\cos\theta)$ sont les fonctions généralisées de Legendre [3]. En effet celles-ci respectent le théorème d'addition

$$e^{-im\chi} P_{mn}^{\ell}(\cos\theta) e^{in\chi'} = \sum_{\ell'=s}^{\ell=s} (-1)^s P_{ms}^{\ell}(\mu) P_{sn}^{\ell}(\mu') \exp(is(\phi-\phi')), \quad (I-10)$$

et chaque élément p_{mn} s'écrira :

$$\begin{aligned} p_{mn}(\mu, \phi; \mu', \phi') &= \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \exp(is(\phi-\phi')) \sum_{\ell=\sup(|m|, |n|, |s|)}^{\ell=\infty} \beta_{mn}^{\ell} P_{ms}^{\ell}(\mu) P_{ns}^{\ell}(\mu') \\ &= \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \exp(is(\phi-\phi')) p_{mn}^{(s)}(\mu, \mu') \end{aligned} \quad (I-11)$$

en développant maintenant $\tilde{L}_{\tilde{K}}(\tau; \mu, \phi)$ sous la forme

$$L_{\nu k}(\tau; \mu, \phi) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} L_{\nu k}^{(s)}(\tau; \mu) \exp(is(\phi - \phi_0))$$

on obtient, après une intégration en ϕ' immédiate et en identifiant dans l'équation (I-8) les termes en $(\phi - \phi_0)$

$$\mu \frac{\partial L_{\nu k}^s}{\partial \tau}(\tau; \mu) = L_{\nu k}^s(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} P_{\nu k}^{(s)}(\mu, \mu') L_{\nu k}^s(\tau; \mu') d\mu' - \frac{\omega_0}{4} e^{\tau/\mu} P_{\nu k}^{(s)}(\mu, \mu_0) F_{\nu k}^s \quad (I-12)$$

où les éléments $P_{mn}^{(s)}(\mu, \mu')$ de $P_{\nu k}^{(s)}(\mu, \mu')$ ont été définis par (I-11).

IV - RETOUR AUX PARAMETRES DE STOKES

On pourrait résoudre ce système d'équations mais on préfère revenir aux paramètres de Stokes dont la signification physique est plus simple. Il suffit pour ceci d'appliquer au système la matrice T qui permet de passer des paramètres de Kuscer aux paramètres de Stokes, à partir de (I-6)

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système (I-12) devient alors

$$\mu \frac{\partial L_{\nu St}^s}{\partial \tau}(\tau; \mu) = L_{\nu St}^s(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} P_{\nu St}^s(\mu, \mu') L_{\nu St}^s(\tau; \mu') d\mu' - \frac{\omega_0}{4} e^{\tau/\mu} P_{\nu St}^s(\mu, \mu_0) F_{\nu St}^s \quad (I-13)$$

où s varie de $-\infty$ à $+\infty$ et où les quantités $P_{\nu St}^s(\mu, \mu') = T P_{\nu k}^s T^{-1}$ seront explicitées plus loin.

Si le faisceau incident est parallèle, on admet un plan de symétrie, (et on se limitera à ces cas), il est clair que les quantités réelles I et Q sont symétriques en ϕ , et U et V antisymétriques, et que l'on peut écrire :

$$I(\tau; \mu, \phi) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} I_{st}^s(\tau; \mu) \exp(is(\phi - \phi_0)) = \sum_{s=0}^{\infty} (2 - \delta_{0s}) I^s(\tau; \mu) \cos s(\phi - \phi_0) \quad (I-14)$$

$$Q(\tau; \mu, \phi) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} Q_{st}^s(\tau; \mu) \exp(is(\phi - \phi_0)) = \sum_{s=0}^{\infty} (2 - \delta_{0s}) Q^s(\tau; \mu) \cos s(\phi - \phi_0) \quad (I-15)$$

$$U(\tau; \mu, \phi) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} U_{st}^s(\tau; \mu) \exp(is(\phi - \phi_0)) = \sum_{s=0}^{\infty} (2 - \delta_{0s}) U^s(\tau; \mu) \sin s(\phi - \phi_0) \quad (I-16)$$

$$V(\tau; \mu, \phi) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} V_{st}^s(\tau, \mu) \exp(is(\phi - \phi_0)) = \sum_{s=0}^{\infty} (2 - \delta_{0s}) V^s(\tau; \mu) \sin s(\phi - \phi_0) \quad (I-17)$$

En développant les quatre équations précédentes et en séparant d'abord partie réelle et partie complexe puis en identifiant en cosinus et en sinus on trouve :

$$\begin{aligned} I_{st}^0 &= I^0 ; & \operatorname{Re}(I_{st}^s) &= \operatorname{Re}(I_{st}^{-s}) = \frac{I^s}{2} ; & \operatorname{Im}(I_{st}^s) &= \operatorname{Im}(I_{st}^{-s}) = 0 \\ Q_{st}^0 &= Q^0 ; & \operatorname{Re}(Q_{st}^s) &= \operatorname{Re}(Q_{st}^{-s}) = \frac{Q^s}{2} ; & \operatorname{Im}(Q_{st}^s) &= \operatorname{Im}(Q_{st}^{-s}) = 0 \\ U_{st}^0 &= 0 ; & \operatorname{Im}(U_{st}^s) &= \operatorname{Im}(U_{st}^{-s}) = -\frac{U^s}{2} ; & \operatorname{Re}(U_{st}^s) &= \operatorname{Re}(U_{st}^{-s}) = 0 \\ V_{st}^0 &= 0 ; & \operatorname{Im}(V_{st}^s) &= \operatorname{Im}(V_{st}^{-s}) = -\frac{V^s}{2} ; & \operatorname{Re}(V_{st}^s) &= \operatorname{Re}(V_{st}^{-s}) = 0 \end{aligned}$$

En utilisant alors ces relations dans le système (I-13) et compte tenu de l'expression de $P_{st}^s(\mu, \mu')$ donnée en (I-23) on obtient finalement le système suivant à résoudre pour s positif :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I^s}{\partial \tau}(\tau; \mu) &= I^s(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} I^s(\tau; \mu') A^s(\mu, \mu') d\mu' - \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} Q^s(\tau; \mu') B^s(\mu, \mu') d\mu' \\ &\quad + \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} (1 - \delta_{0s}) U^s(\tau; \mu') C^s(\mu, \mu') d\mu' - \frac{\omega_0}{4} F e^{\tau/\mu_0} A^s(\mu, \mu_0) \end{aligned} \quad (I-18)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial Q^s}{\partial \tau}(\tau; \mu) &= Q^s(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} Q^s(\tau; \mu') D^s(\mu, \mu') d\mu' \dots \\ &\quad + (1 - \delta_{0s}) \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} U^s(\tau; \mu') E^s(\mu, \mu') d\mu' - \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} I^s(\tau; \mu') B^s(\mu', \mu) d\mu' \\ &\quad + (1 - \delta_{0s}) \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} V^s(\tau; \mu') G^s(\mu, \mu') d\mu' - \frac{\omega_0 F}{8} e^{\tau/\mu_0} B^s(\mu_0, \mu) \end{aligned} \quad (I-19)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial U^S}{\partial \tau}(\tau; \mu) &= U^S(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} U^S(\tau; \mu') F^S(\mu, \mu') d\mu' \\ &+ \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} Q^S(\tau; \mu') E^S(\mu', \mu) d\mu' + \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} I^S(\tau; \mu') C^S(\mu', \mu) d\mu' \\ &- \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} V^S(\tau; \mu') H^S(\mu', \mu) d\mu' + \frac{\omega_0 F}{8} e^{\tau/\mu_0} C^S(\mu_0, \mu) \quad (I-20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial V^S}{\partial \tau}(\tau; \mu) &= V^S(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} V^S(\tau; \mu') J^S(\mu, \mu') d\mu' \\ &+ \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} Q^S(\tau; \mu') G^S(\mu, \mu') d\mu' - \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} U^S(\tau; \mu') H^S(\mu, \mu') d\mu' \end{aligned}$$

avec les définitions suivantes :

$$A^S(\mu, \mu') = \sum_{\ell=s}^L \beta_{\ell} P_{\ell}^s(\mu) P_{\ell}^s(\mu')$$

$$B^S(\mu, \mu') = \sum_{\ell=\sup(2; s)}^L \gamma_{\ell} P_{\ell}^s(\mu) \{P_{s+2}^{\ell}(\mu') + P_{s-2}^{\ell}(\mu')\}$$

$$C^S(\mu, \mu') = \sum_{\ell=\sup(2; s)}^L \gamma_{\ell} P_{\ell}^s(\mu) \{P_{s+2}^{\ell}(\mu') - P_{s-2}^{\ell}(\mu')\}$$

$$\begin{aligned} D^S(\mu, \mu') &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=\sup(2; s)}^L \{ \alpha_{\ell} (P_{s-2}^{\ell}(\mu) + P_{s-2}^{\ell}(\mu)) (P_{s-2}^{\ell}(\mu') + P_{s-2}^{\ell}(\mu')) \\ &+ \xi_{\ell} (P_{s-2}^{\ell}(\mu) - P_{s-2}^{\ell}(\mu)) (P_{s-2}^{\ell}(\mu') - P_{s-2}^{\ell}(\mu')) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^S(\mu, \mu') &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=\sup(2; s)}^L \{ \alpha_{\ell} (P_{s-2}^{\ell}(\mu) + P_{s-2}^{\ell}(\mu)) (P_{s-2}^{\ell}(\mu') - P_{s-2}^{\ell}(\mu')) \\ &+ \xi_{\ell} (P_{s-2}^{\ell}(\mu') + P_{s-2}^{\ell}(\mu')) (P_{s-2}^{\ell}(\mu) - P_{s-2}^{\ell}(\mu')) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^S(\mu, \mu') &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=\sup(2; s)}^L \{ \alpha_{\ell} (P_{s-2}^{\ell}(\mu) - P_{s-2}^{\ell}(\mu)) (P_{s-2}^{\ell}(\mu') - P_{s-2}^{\ell}(\mu')) \\ &+ \xi_{\ell} (P_{s-2}^{\ell}(\mu) + P_{s-2}^{\ell}(\mu)) (P_{s-2}^{\ell}(\mu') + P_{s-2}^{\ell}(\mu')) \} \end{aligned}$$

de la particule.

(r rayon de la particule, λ longueur d'onde du rayonnement) et de l'indice

Mie {4}. Dans ce cas, elles ne dépendent que du paramètre de Mie $\alpha = \frac{\lambda}{2\pi r}$

ont été tabulées pour des particules sphériques à partir de la théorie de

Les quantités $a_\ell, b_\ell, \gamma_\ell, \delta_\ell, \epsilon_\ell$ et ξ_ℓ , combinaisons des coefficients $B_{\ell m}^{(m)}$,

On remarque sur ces développements que $U_0(r;n) \equiv V_0(r;n) \equiv 0$.

$$J_s(n, n') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{\ell s} P_\ell^s(n) P_\ell^s(n')$$

$$H_s(n, n') = \sum_{\ell=\sup(2;s)}^{\infty} \epsilon_\ell P_\ell^s(n) \{ P_\ell^{s2}(n') + P_\ell^{s-2}(n') \}$$

$$G_s(n, n') = \sum_{\ell=\sup(2;s)}^{\infty} \epsilon_\ell P_\ell^s(n) \{ P_\ell^{s2}(n') - P_\ell^{s-2}(n') \}$$

(I-22)

CHAPITRE II

RESOLUTION DE L'EQUATION DE TRANSFERT PAR LA METHODE DES HARMONIQUES
SPHERIQUES DANS LE CAS D'UNE INCIDENCE NORMALE

RESOLUTION DE L'EQUATION DE TRANSFERT PAR LA METHODE DES HARMONIQUES

SPHERIQUES DANS LE CAS D'UNE INCIDENCE NORMALE

I - Introduction

Comme on l'a vu dans les rappels, la résolution de l'équation de transfert dans le cas d'une incidence oblique est compliquée, puisqu'on est amené à résoudre simultanément quatre équations intégrales, et ceci pour chaque terme de la décomposition en série de Fourier. En incidence normale, le problème est beaucoup plus simple; le système étant symétrique autour de la direction d'incidence, les différents paramètres sont indépendants de l'azimut et seul le cas $s=0$ est à traiter. De plus U et V se développant en série de sinus n'apparaîtront pas, et le système intégral différentiel ne portera que sur les paramètres $I(\tau; \mu)$ et $Q(\tau; \mu)$. Du fait de ces simplifications nous avons choisi de nous placer en incidence normale afin de tester le problème de la polarisation. Comme la solution exacte avait déjà été programmée [5], en nous basant sur le fait que la luminance totale dépend assez peu de la polarisation, et que par conséquent l'équation sur $I(\tau; \mu)$ peut être résolue sans tenir compte de $Q(\tau; \mu)$, nous avons mis au point une méthode itérative pour le calcul du rayonnement polarisé.

II - Calcul exact par les Harmoniques Sphériques

Nous rappellerons succinctement la méthode de résolution "exacte" [5] de façon à poser les équations à résoudre. D'après (1.18) et (1.19) on doit résoudre le système.

$$\mu \frac{\partial I(\tau; \mu)}{\partial \tau} = I(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau; \mu') \sum_{l=0}^{2p} B_l P_l(\mu') d\mu' \quad (11.1)$$

$$- \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} Q(\tau; \mu') \sum_{l=2}^{2p} \gamma_l P_l^2(\mu') d\mu' - \frac{\omega_0}{4} F e^{-\tau} \sum_{l=0}^{2p} B_l (-1)^l P_l(\mu)$$

$$\mu \frac{\partial Q(\tau; \mu)}{\partial \tau} = Q(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} Q(\tau; \mu') \sum_{\ell=2}^{2p} \frac{\alpha_\ell}{2} P_\ell^\ell(\mu) P_\ell^\ell(\mu') d\mu' \quad (11.2)$$

$$- \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau; \mu') \sum_{\ell=2}^{2p} \gamma_\ell P_\ell^\ell(\mu') P_\ell^\ell(\mu) d\mu' - \frac{\omega_0}{4} e^{-\tau} \sum_{\ell=2}^{2p} \gamma_\ell (-1)^\ell P_\ell^\ell(\mu)$$

La procédure normale des Harmoniques Sphériques consiste à développer $I(\tau; \mu)$ et $Q(\tau; \mu)$ sous la forme

$$I(\tau; \mu) = \sum_{\ell=0}^{2p-1} (2\ell+1) A_\ell(\tau) P_\ell(\mu) \quad (11.3)$$

$$Q(\tau; \mu) = \sum_{\ell=2}^{2p-1} (2\ell+1) B_\ell(\tau) P_\ell^\ell(\mu)$$

et à substituer ces développements dans les équations (11.1) et (11.2). En identifiant les coefficients des polynômes $P_\ell(\mu)$ et $P_\ell^\ell(\mu)$ (qui forment des systèmes complets sur l'intervalle $[-1, +1]$) on obtient un système différentiel d'ordre $4p - 2$ en $A_\ell(\tau)$ et $B_\ell(\tau)$:

$$(\ell+1) \frac{dA_{\ell+1}(\tau)}{d\tau} + \ell \frac{dA_{\ell-1}(\tau)}{d\tau} = (2\ell+1 - \omega_0 \beta_\ell) A_\ell(\tau) - \frac{\omega_0 F}{4} (-1)^\ell \beta_\ell e^{-\tau} \quad (11.4)$$

$$\sqrt{(\ell+3)(\ell-1)} \frac{dB_{\ell+1}(\tau)}{d\tau} + \sqrt{(\ell+2)(\ell-2)} \frac{dB_{\ell-1}(\tau)}{d\tau} = (2\ell+1 - \omega_0 \alpha_\ell) B_\ell(\tau) - \frac{\omega_0 F}{4} (-1)^\ell \gamma_\ell e^{-\tau} \quad (11.5)$$

dont la solution générale s'écrit

$$A_\ell(\tau) = \lambda_\ell e^{-\tau} + \sum_{i=1}^{4p-2} k_i e^{-\nu_i \tau} g_\ell(\nu_i); \quad B_\ell(\tau) = \xi_\ell e^{-\tau} + \sum_{i=1}^{4p-2} k_i e^{-\nu_i \tau} h_\ell(\nu_i) \quad (11.6)$$

Les termes en λ_ℓ et ξ_ℓ correspondent à la solution particulière du système complet (11.4) et (11.5), à laquelle on ajoute avec des constantes d'inté-

gration k_i à déduire des conditions aux limites, $(4p-2)$ solutions du système homogène associé, solutions cherchées sous la forme :

$$A_{\ell}(\tau) = g_{\ell}(v) e^{-v\tau} ; B_{\ell}(\tau) = h_{\ell}(v) e^{-v\tau} \quad (11.7)$$

Le calcul des coefficients $v_i, g_{\ell}(v_i), h_{\ell}(v_i)$ et k_i constitue l'essentiel du problème numérique posé. La difficulté vient de la résolution du système homogène associé (11.4) et (11.5). En remplaçant (11.7) dans (11.4) et (11.5) on obtient les deux relations de récurrence.

$$v \left[\sqrt{(\ell+3)(\ell-1)} h_{\ell+1} + \sqrt{(\ell+2)(\ell-2)} h_{\ell-1} \right] + (2\ell+1 - \omega_0 a_{\ell}) h_{\ell} = \omega_0 \gamma_{\ell} g_{\ell} \quad \ell = 0, 1, \dots, 2p-1 \quad (11.8a)$$

$$v \left[(\ell+1) g_{\ell+1} + \ell g_{\ell-1} \right] + (2\ell+1 - \omega_0 \beta_{\ell}) g_{\ell} = \omega_0 \gamma_{\ell} h_{\ell} \quad \ell = 2, 3, \dots, 2p-1 \quad (11.8b)$$

Ce système linéaire est initialisé par la donnée de $g_0 (h_1=0 \text{ et } g_{-1}=0)$. Les solutions étant définies à une constante près, on pose $g_0 = 1$. La compatibilité du système est alors assurée si on peut choisir h_2 et v de façon à respecter simultanément :

$$g_{2p}(v, h_2) \equiv 0 ; h_{2p}(v, h_2) \equiv 0 \quad (11.9)$$

On vérifiera sur les équations (11.8) que g_{ℓ} et h_{ℓ} sont de la forme :

$$g_{\ell} = \sum_{m=0}^{\text{entier}(\ell/2)} (a_m^{\ell} + h_2 b_m^{\ell}) v^{2m-\ell} \quad (11.10a)$$

$$\text{et } h_{\ell} = \sum_{m=0}^{\text{entier}(\ell/2)} (d_m^{\ell} + h_2 f_m^{\ell}) v^{2m-\ell} \quad (11.10b)$$

où tous les coefficients $a_m^{\ell}, b_m^{\ell}, c_m^{\ell}$ et d_m^{ℓ} se calculent facilement par récurrence. On peut donc calculer ces coefficients à l'ordre $2p$ et, en éliminant h_2 entre g_{2p} et h_{2p} , obtenir une équation de degré $(2p-1)$ en v^2 qui donnera les $(4p-2)$ racines v_i cherchées, soit

$$\left(\sum_{m=0}^p v^{2m} a_m^{2p} \right) \left(\sum_{m=0}^p v^{2m} f_m^{2p} \right) - \left(\sum_{m=0}^p v^{2m} d_m^{2p} \right) \left(\sum_{m=0}^p v^{2m} b_m^{2p} \right) = 0 \quad (11.11)$$

L'extraction directe des racines $\chi_i = v_i^2$ de l'équation (11.11) serait délicate, aux ordres p élevés qu'on doit utiliser pour traiter cor-

rectement le cas de fonctions de phase anisotropes. En fait le calcul est effectué de proche en proche, à tous les ordres d'approximation 4, 5, ..., 2p, cette phase du calcul restant néanmoins très délicate.

De la même façon on cherchera une solution particulière du système complet (11.4) et (11.5) sous la forme :

$$A_\ell(\tau) = \lambda_\ell e^{-\tau} \quad \text{et} \quad B_\ell(\tau) = \xi_\ell e^{-\tau}$$

ce qui conduit par substitution aux récurrences

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\ell-1)(\ell+3)} \xi_{\ell+1} + \sqrt{(\ell+2)(\ell-2)} \xi_{\ell-1} + (2\ell+1 - \omega_0 \alpha_\ell) \xi_\ell \\ & = \omega_0 \gamma_\ell \lambda_\ell + \omega_0 F (-1)^\ell \gamma_\ell / 4 \end{aligned} \quad (11.12a)$$

$$\begin{aligned} & (\ell+1) \lambda_{\ell+1} + \ell \lambda_{\ell-1} + (2\ell+1 - \omega_0 \beta_\ell) \lambda_\ell = \omega_0 \gamma_\ell \xi_\ell + \omega_0 F (-1)^\ell \beta_\ell / 4 \end{aligned} \quad (11.12b)$$

Le système est initialisé par la donnée de λ_0 et ξ_2 ($\lambda_{-1} = 0$ et $\xi_1 = 0$) et sa compatibilité assurée si on peut annuler λ_{2p} et ξ_{2p} . Le système étant linéaire on posera :

$$\lambda_\ell = a_\ell \lambda_0 + b_\ell \quad \text{et} \quad \xi_\ell = d_\ell \xi_2 + f_\ell \quad (11.13)$$

En substituant (11.13) dans les équations (11.12a) et b), on obtient des relations permettant le calcul des coefficients a_ℓ , b_ℓ , d_ℓ , et f_ℓ à l'ordre 2p; et on en déduira λ_0 et ξ_2 par :

$$\lambda_{2p} = 0 = a_{2p} \lambda_0 + b_{2p} \quad \text{et} \quad \xi_{2p} = 0 = d_{2p} \xi_2 + f_{2p} \quad (11.14)$$

λ_0 et ξ_2 étant connus on calculera alors λ_ℓ et ξ_ℓ d'après les relations (11.12a et b)

Il reste à déterminer les (4p-2) constantes d'intégration k_j . On a retenu les conditions de Marshak [6] qui ont l'avantage de respecter les conditions sur le flux en haut et en bas de la couche. Les relations qui en résultent sont les suivantes (dans le cas où il n'existe pas de sources extérieures diffuses):

$$\int_0^+ \mu^{2j-1} I(\tau_1; \mu) d\mu = 0 \quad ; \quad \int_0^- \mu^{2j-1} I(0; \mu) d\mu = 0$$

$j = 1, 2, \dots, p$ (11.15a)

$$\int_0^{+1} \mu^{2j-1} Q(\tau; \mu) d\mu = 0 \quad ; \quad \int_0^{-1} \mu^{2j-1} Q(0; \mu) d\mu = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, p-1 \tag{11.15b}$$

Remplaçant l et Q par leurs développements (11.6), on obtient un système linéaire de $(4p-2)$ équations en k_j qu'on peut mettre sous la forme matricielle :

$$(a_j^i)(k_j) = (b_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, 4p-2$$

III. Méthode d'approximations successives

Pour un milieu diffusant nécessitant un développement à un ordre donné $2p$, la méthode précédente amène donc à résoudre un polynôme d'ordre $2p$ en v^2 . En négligeant la polarisation, le polynôme $g_{2p} = 0$ dont on cherche les racines n'est que d'ordre p en v^2 et varie de façon régulière (d'où une extraction de racines relativement aisée). En polarisation le polynôme (11.11) varie au contraire très irrégulièrement, ce qui complique le problème.

On peut éviter ces difficultés par une résolution approchée conduisant à un calcul itératif, mais où on n'aura à traiter que des polynômes de degré p en v^2 . On calculera d'abord la luminance l en négligeant la polarisation. On sait que cette approximation est déjà excellente [7]. Soit $l^{(0)}(\tau, \mu)$ la solution de (11.1) où l'on néglige $Q(\tau; \mu)$ au second membre. Dans l'approximation d'ordre $2p$ on aura donc

$$l^{(0)}(\tau, \mu) = \sum_{\ell=0}^{2p-1} (2\ell + 1) P_{\ell}(\mu) \left\{ \lambda_{\ell}^{(0)} e^{-\tau} + \sum_{i=1}^{2p} k_i^{(0)} e^{-v_i^* \tau} g_{\ell}(v_i^*) \right\} \tag{11.16}$$

où $\lambda_{\ell}^{(0)}$, $k_i^{(0)}$, $g_{\ell}(v_i^*)$ et v_i^* se calculent suivant les procédures exposées précédemment mais sur des systèmes plus simples. En particulier on calcule v_i^* à partir de l'équation $g_{2p}(v^*) = 0$ dans laquelle h_2 n'intervient plus. Les $g_{\ell}(v_i^*)$ se déduisent de la récurrence (11.8b) dans laquelle $h_{\ell} \equiv 0$. Enfin le calcul des constantes $k_i^{(0)}$ se fera uniquement sur les équations (11.15a).

De la même façon, soit $Q^{(0)}(\tau; \mu)$ la solution de l'équation (11.2) où on néglige la source $l(\tau; \mu)$ au second membre : on aura

$$Q^{(0)}(\tau; \mu) = \sum_{\ell=2}^{2p-1} (2\ell + 1) \frac{P_{\ell}(\mu)}{2} \left\{ \xi_{\ell}^{(0)} e^{-\tau} + \sum_{i=1}^{2p-2} \ell_i^{(0)} e^{-\eta_i^* \tau} h_{\ell}(\eta_i^*) \right\} \tag{11.17}$$

avec des calculs semblables à ceux donnant $l^{(0)}(\tau; \mu)$: les racines η_i^* sont celles du polynôme $h_{2p}(\eta^*)$ (avec $B_{\ell}(\tau)$ de la forme $e^{-\eta^* \tau} h_{\ell}(\eta^*)$); on utilisera les récurrences (11.8a) et (11.12a) avec $g_{\ell} \equiv 0$ et $\lambda_{\ell} \equiv 0$; les constantes d'intégration $\ell_i^{(0)}$ seront déduites de la relation (11.15b).

$Q^{(0)}(\tau; \mu)$ est à priori sans valeur, mais puisque $I^{(0)}(\tau; \mu)$ est une excellente approximation, en remplaçant $I(\tau; \mu)$ par $I^{(0)}(\tau; \mu)$ dans l'équation différentielle sur Q , la solution $Q^{(1)}(\tau; \mu)$ qui en résulte doit constituer une solution satisfaisante du problème. Cette itération conduit à l'équation simple

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial Q^{(1)}}{\partial \tau}(\tau; \mu) = Q^{(1)}(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} \sum_{\ell=2}^{2p-1} \alpha_\ell P_2^\ell(\mu) P_2^\ell(\mu') Q^{(1)}(\tau; \mu') d\mu' \\ - \sum_{\ell=2}^{2p-1} \gamma_\ell P_2^\ell(\mu) \left[\left(\frac{F}{4} (-1)^\ell + \lambda_\ell^{(0)} \right) e^{-\tau} + \sum_{i=1}^{2p} k_i^{(0)} g_\ell(v_i^*) e^{-v_i^* \tau} \right] \end{aligned} \quad (11.18)$$

de la même forme que celle en $Q^{(0)}(\tau; \mu)$ aux sources près connues en $e^{-v_i^* \tau}$; on ramène ainsi le problème de l'influence de la luminance à un simple calcul de solutions particulières correspondant à ces nouvelles sources et la solution de (11.18) s'écrira :

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(\tau; \mu) = \sum_{\ell=2}^{2p-1} (2\ell + 1) P_2^\ell(\mu) \left[\xi_\ell^{(1)} e^{-\tau} + \sum_{i=1}^{2p} \xi_{\ell,i}^{(1)} e^{-v_i^* \tau} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{2p-2} \lambda_i^{(1)} e^{-\eta_i^* \tau} h_\ell(\eta_i^*) \right] \end{aligned} \quad (11.19)$$

où les coefficients $\xi_\ell^{(1)}$ et $\xi_{\ell,1}^{(1)}$ se déterminent à partir des récurrences

$$\begin{aligned} \sqrt{(\ell+2)(\ell-2)} \xi_{\ell-1}^{(1)} + \sqrt{(\ell+3)(\ell-1)} \xi_{\ell+1}^{(1)} + (2\ell + 1 - \omega_0 \alpha_\ell) \xi_\ell^{(1)} \\ = \frac{\omega_0 F}{4} \gamma_\ell (-1)^\ell + \omega_0 \gamma_\ell \lambda_\ell^{(0)} \end{aligned} \quad (11.20a)$$

$$\begin{aligned} v_i^* \left[\sqrt{(\ell+2)(\ell-2)} \xi_{\ell-1,1}^{(1)} + \sqrt{(\ell+3)(\ell-1)} \xi_{\ell+1,i}^{(1)} \right] + (2\ell + 1 - \omega_0 \alpha_\ell) \xi_{\ell,i}^{(1)} \\ = \omega_0 \gamma_\ell k_i^{(0)} g_\ell(v_i^*) \end{aligned} \quad (11.20b)$$

Symétriquement, on obtiendra pour la luminance totale une solution itérée

$$I^{(1)}(\tau; \mu) = \sum_{\ell=0}^{2p-1} (2\ell + 1) P_\ell(\mu) \left\{ \lambda_\ell^{(1)} e^{-\tau} + \sum_{i=1}^{2p-2} \lambda_{\ell,i}^{(1)} e^{-\eta_i^* \tau} + \sum_{i=1}^{2p} k_i^{(1)} e^{-v_i^* \tau} g_\ell(v_i^*) \right\} \quad (11.21)$$

si l'on substitue (0) (τ; u) au second membre de l'équation (11.11). Les récurrences déterminant $\lambda_{\delta}^{(1)}$ et $\lambda_{\delta}^{(1)}$ sont les suivantes :

$$\lambda_{\delta}^{(1)} \lambda_{\delta-1}^{(1)} + (\delta+1) \lambda_{\delta+1}^{(1)} + (2\delta+1 - w_0 \beta_{\delta}) \lambda_{\delta}^{(1)} = \frac{4}{F} \beta_{\delta} (-1)^{\delta} + w_0 \gamma_{\delta} \varepsilon_{\delta}^{(0)} \quad (11.22a)$$

$$\lambda_{\delta}^{(1)} \lambda_{\delta-1}^{(1)} + (\delta+1) \lambda_{\delta+1}^{(1)} + (2\delta+1 - w_0 \beta_{\delta}) \lambda_{\delta}^{(1)} = w_0 \gamma_{\delta} \lambda_{\delta}^{(0)} h_{\delta}^{(1)} \quad (11.22b)$$

En conclusion, nous constatons que la méthode itérative nous

amène à résoudre des équations formellement identiques à celles de la

solution exacte; cependant, plutôt que de résoudre directement pour un

ordre $4p-2$ on résoud deux fois avec des ordres $2p$ et $2p-2$. On ne peut pas poursuivre simplement l'itération en substituant (1) et \hat{Q} à (1) et \hat{Q}

respectivement dans les seconds membres des équations (11.2) et (11.1).

En effet si l'on substitue (1) à (1) dans (11.2) on aura

$$u \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} (2) (\tau; u) = \hat{Q} (2) (\tau; u) - \frac{2}{w_0} \int_{-1}^{+1} \alpha_{\delta} P_{\delta}^2 (u) P_{\delta}^2 (u) \hat{Q} (\tau; u) du$$

$$- w_0 \int_{-1}^{+1} \gamma_{\delta} P_{\delta}^2 (u) \left[\frac{F}{4} (-1)^{\delta} e^{-\tau} + \lambda_{\delta}^{(1)} e^{-\tau} + \frac{1}{2p-2} \lambda_{\delta}^{(1)} e^{-n^{\dagger}} \right]$$

$$+ \frac{1}{2p} k_{\delta}^{(1)} e^{-v^{\dagger}} \beta_{\delta} (v^{\dagger}) \left[\right]$$

Solent $\lambda_{\delta}^{(2)}$ les coefficients correspondants à n^{\dagger} la solution particulière obtenue par identification des termes $\lambda_{\delta}^{(1)}$ $e^{-n^{\dagger}}$; ces coefficients se déterminent de la récurrence :

$$\lambda_{\delta}^{(2)} \left[\sqrt{(\delta+3)(\delta-1)} \lambda_{\delta+1}^{(2)} + \sqrt{(\delta+2)(\delta-2)} \lambda_{\delta-1}^{(2)} \right] + (2\delta+1 - w_0 \alpha_{\delta}) \lambda_{\delta}^{(2)} = w_0 \gamma_{\delta} \lambda_{\delta}^{(1)}$$

On résoud cette récurrence en posant, pour chaque n^{\dagger} , $\lambda_{\delta}^* = a_{\delta} x_2 + b_{\delta}$, les coefficients a_{δ} et b_{δ} se calculant comme suit :

$$\lambda_{\delta}^* \left[\sqrt{(\delta+3)(\delta-1)} a_{\delta+1} + \sqrt{(\delta+2)(\delta-2)} a_{\delta-1} \right] + (2\delta+1 - w_0 \alpha_{\delta}) a_{\delta} = w_0 \gamma_{\delta} a_{\delta}^0$$

$$\lambda_{\delta}^* \left[\sqrt{(\delta+3)(\delta-1)} b_{\delta+1} + \sqrt{(\delta+2)(\delta-2)} b_{\delta-1} \right] + (2\delta+1 - w_0 \gamma_{\delta}) b_{\delta} = w_0 \gamma_{\delta} \lambda_{\delta}^{(1)}$$

avec les initialisations $a_2 = 1$ et $b_1 = b_2 = a_1 = 0$.

On cherche alors à annuler x_{2p} ce qui donne la valeur de $x_2 = -\frac{b_{2p}}{a_{2p}}$

Cependant puisque les coefficients a_ℓ suivent exactement la même récurrence que $h_\ell(\eta_1^*)$ et que η_1^* a été déterminé en posant $h_{2p}(\eta_1^*) = 0$, nous aurons $a_{2p} = 0$ d'où l'impossibilité de calculer x_2 . Les solutions particulières, si elles existent, ne seront donc pas de type exponentiel. De toute façon, les itérations seraient alors difficiles à effectuer ce qui ferait perdre de l'intérêt à la méthode. D'autre part nous verrons dans les résultats, que les solutions $I^{(1)}$ et $Q^{(1)}$ conduisent déjà à d'excellents résultats et qu'il n'est donc pas nécessaire de poursuivre les itérations au delà du premier ordre.

Remarque sur le calcul des récurrences

Prenons l'exemple des relations régissant les coefficients $g_\ell(v_1^*)$ et $h_\ell(\eta_1^*)$. Ces relations sont de la forme :

$$\theta \{ a_\ell x_{\ell+1} + a_{\ell-1} x_{\ell-1} \} + \omega_\ell x_\ell = 0$$

avec $\theta = v^*$ et $x_\ell = g_\ell$ ou $\theta = \eta^*$ et $x = h_\ell$

Les coefficients a_ℓ et ω_ℓ étant connus et constants.

Lorsque l'on a déterminé la racine θ telle que $x_{2p}(\theta) = 0$, on peut calculer tous les coefficients x_ℓ par récurrence

$$x_{\ell+1} = - (a_{\ell-1} x_{\ell-1} + \omega_\ell x_\ell / \theta) / a_\ell$$

à partir des coefficients initialisés $x_{\min-1} = 0$ et $x_{\min} = 1$.

Cette récurrence donne cependant une forte propagation d'erreur lorsque la racine θ est inférieure à 1 en valeur absolue {8}, si bien que les coefficients x_ℓ sont faux et que x_{2p} est différent de zéro. Cette erreur est liée à la précision avec laquelle on connaît les racines.

Pour éviter cette erreur on calcule les coefficients x_ℓ dans le sens inverse:

$$x'_{\ell-1} = - (a_\ell x'_{\ell+1} + \omega_\ell x'_\ell / \theta) / a_{\ell-1}$$

en initialisant avec $x'_{2p-1} = 1$ et $x'_{2p} = 0$.

La récurrence fournit alors la valeur de x'_{\min} qu'il faut normaliser à 1.

Pour obtenir les x_ℓ il suffit de poser $x_\ell = \frac{x'_\ell}{x'_{\min}}$.

Nous allons voir maintenant un exemple appliqué à la récurrence sur les coefficients g_ℓ , pour des particules caractérisées par le paramètre de Mie $\alpha = 2$ et un albédo $\omega_0 = 0.999$ (les fonctions de phase étant développées à l'ordre $2p = 8$).

La récurrence est effectuée pour la plus petite racine $v^* = 0.031491109$

On sait que pour cette plus petite racine la série des g_ℓ converge ce qui est un point de comparaison.

On a noté dans la première colonne le résultat obtenu par la récurrence "directe" et dans la seconde le résultat obtenu à partir de la récurrence "inverse" ceci en fonction de l'ordre ℓ .

ℓ	récurrence directe		récurrence inverse	
0		1		1
1	-3.175499	10^{-2}	-3.175499	10^{-2}
2	5.819448	10^{-4}	5.819431	10^{-4}
3	-8.7552706	10^{-6}	-8.692468	10^{-6}
4	3.2777311	10^{-6}	1.247682	10^{-7}
5	-1.7572774	10^{-4}	-1.7940974	10^{-9}
6	1.0183793	10^{-2}	2.6096023	10^{-11}
7	-6.0011399	10^{-1}	-3.83520505	10^{-13}
8	3.5720639	10^{-1}		0

Pour les racines v^* supérieures à 1, la propagation d'erreur est négligeable et ce résultat indépendant du sens de la récurrence.

Considérons maintenant une récurrence avec second membre de la forme

$$a_\ell x_{\ell+1} + a_{\ell-1} x_{\ell-1} + \omega_\ell x_\ell = f_\ell$$

La méthode inverse qui consisterait à poser $x_\ell = c_\ell x_{2p-1} + d_\ell$, et à chercher x_{2p-1} en annulant $x_{\min-1}$ est impossible; en effet la récurrence n'est pas définie pour $\ell = \min - 1$.

On peut néanmoins apporter une amélioration à la méthode directe.

Si on pose $x_\ell = c_\ell x_{\min} + d_\ell$, par identification, on aura

$$\theta \left[a_\ell c_{\ell+1} + a_{\ell-1} c_{\ell-1} \right] + \omega_\ell c_\ell = 0$$

$$\theta \left[a_\ell d_{\ell+1} + c_{\ell-1} d_{\ell-1} \right] + \omega_\ell d_\ell = f_\ell$$

avec $c_{\min-1} = d_{\min-1} = d_{\min} = 0$ et $c_{\min} = 1$

On voit donc que l'on est dans les conditions pour appliquer la récurrence inverse sur les coefficients c_ℓ (comme avec les g_ℓ et h_ℓ) et les déterminer ainsi avec plus de précision.

Solution finale

Les formules (11.16, 17, 19 et 21) permettent donc de calculer I et Q dans toute la couche. Les diagrammes obtenus avec ces expressions brutes donnent cependant des oscillations autour des valeurs exactes qu'on peut éliminer en intégrant formellement les équations initiales (11.1) et (11.2) [9]. En particulier, pour le haut de la couche ($\tau = 0$) les solutions formelles sont les suivantes :

$$I(0; \mu) = \int_0^{\tau_1} \frac{\omega_0}{2\mu} e^{-t/\mu} \left[\frac{F}{2} e^{-t} \sum_{\ell=0}^{2p-1} \beta_\ell P_\ell(\mu) (-1)^\ell + \int_{-1}^{+1} A(t; \mu') d\mu' \right] dt \quad (11.23)$$

$$\text{avec } A(t; \mu') = \sum_{\ell=0}^{2p-1} \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) P_{\ell}(\mu') I(t; \mu')$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{2p-1} \gamma_{\ell} P_{\ell}(\mu) P_2^{\ell}(\mu') Q(t; \mu')$$

$$\text{et } Q(o; \mu) = \int_0^{\tau} \frac{\omega_0}{2\mu} e^{-t/\mu} \left[\frac{F}{2} e^{-t} \sum_{\ell=2}^{2p-1} \gamma_{\ell} P_2^{\ell}(\mu) (-1)^{\ell} + \int_{-1}^{+1} B(t, \mu') d\mu' \right] dt$$

(11.24)

$$\text{avec } B(t; \mu') = \sum_{\ell=2}^{2p-1} \alpha_{\ell} P_2^{\ell}(\mu) P_2^{\ell}(\mu') Q(t; \mu')$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{2p-1} \gamma_{\ell} P_2^{\ell}(\mu) P_{\ell}(\mu') I(t; \mu')$$

En remplaçant sous les intégrales $I(t; \mu')$ et $Q(t; \mu')$ par leurs expressions développées $I^{(1)}$ et $Q^{(1)}$ ou $I^{(o)}$ et $Q^{(o)}$ l'orthogonalité des polynômes $P_{\ell}(\mu')$ et $P_2^{\ell}(\mu')$ permet d'intégrer immédiatement et donne les solutions finales notées de $I(\tau; \mu)$ et $Q(\tau; \mu)$. Les résultats présentés concerneront toujours le rayonnement rediffusé à $\tau = 0$. On notera $Q_0^*(\mu)$ et $I_0^*(\mu)$ les résultats obtenus en annulant $I(t; \mu')$ dans (11.2) et $Q(t; \mu')$ dans (11.1), et en y remplaçant respectivement aux seconds membres $Q(t; \mu')$ et $I(t; \mu')$ par $Q^{(o)}(t; \mu')$ et $I^{(o)}(t; \mu')$ (expressions (11.17) et (11.16)). Il vient

$$I_0^*(\mu) = \omega_0 \sum_{\ell=0}^{2p-1} \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) \left[\left((-1)^{\ell} \frac{F}{4} + \lambda_{\ell}^{(o)} \right) \frac{1 - e^{-\tau} 1^{\frac{1}{\mu} + 1}}{1 + \mu} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2p} k_i^{(o)} g_{\ell}(v_i^*) \frac{1 - e^{-\tau_1 (v_i^* + \frac{1}{\mu})}}{1 + \mu v_i^*} \right]$$

(11.25)

$$Q_0^*(\mu) = \omega_0 \sum_{\ell=2}^{2p-1} P_2^{\ell}(\mu) \left[\left((-1)^{\ell} \frac{F}{4} \gamma_{\ell} + \xi_{\ell}^{(o)} \alpha_{\ell} \right) \frac{1 - e^{-\tau_1 (\frac{1}{\mu} + 1)}}{1 + \mu} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2p-2} \alpha_{\ell} \xi_i^{(o)} h_{\ell}(\eta_i^*) \frac{1 - e^{-\tau_1 (\eta_i^* + \frac{1}{\mu})}}{1 + \mu \eta_i^*} \right]$$

(11.26)

De même nous noterons $I_1^*(\mu)$ et $Q_1^*(\mu)$ les résultats obtenus en remplaçant $I(t; \mu)$ et $Q(t; \mu)$ aux seconds membres de (11.1) et (11.2), par $Q_0(t; \mu)$ et $I_0(t; \mu)$, suivant les expressions (11.16) et (11.17). On aura alors

$$I_1^*(\mu) = I_0^*(\mu) + \omega_0 \sum_{\ell=2}^{2p-1} \gamma_\ell P_\ell(\mu) \left[\xi_\ell^{(0)} \frac{1 - e^{-\tau_1(\frac{1}{\mu} + 1)}}{1 + \mu} + \sum_{i=1}^{2p-2} \ell_i^{(0)} h_\ell(\eta_i^*) \frac{1 - e^{-\tau_1(\frac{1}{\mu} + \eta_i^*)}}{1 + \mu \eta_i^*} \right] \quad (27)$$

$$Q_1^*(\mu) = Q_0^*(\mu) + \omega_0 \sum_{\ell=2}^{2p-1} \gamma_\ell P_2^\ell(\mu) \left[\lambda_\ell^{(0)} \frac{1 - e^{-\tau_1(\frac{1}{\mu} + 1)}}{1 + \mu} + \sum_{i=1}^{2p} k_i^{(0)} g_\ell(v_i^*) \frac{1 - e^{-\tau_1(\frac{1}{\mu} + v_i^*)}}{1 + \mu v_i^*} \right] \quad (28)$$

Enfin $Q_2^*(\mu)$ et $I_2^*(\mu)$ seront les résultats obtenus en remplaçant $Q(t; \mu')$ et $I(t; \mu')$ par $Q^{(1)}(t; \mu')$ et $I^{(1)}(t; \mu')$ (équations (11.19) et (11.21)) dans les seconds membres de (11.1) et (11.2), soit

$$I_2^*(\mu) = \omega_0 \sum_{\ell=0}^{2p-1} P_\ell(\mu) \left[(\beta_\ell \frac{F}{4}(-1)^\ell + \lambda_\ell^{(1)} \beta_{\ell+\gamma_\ell} \xi_\ell^{(1)}) \frac{1 - e^{-\tau_1(\frac{1}{\mu} + 1)}}{1 + \mu} + \sum_{i=1}^{2p} (\beta_\ell k_i^{(1)} g_\ell(v_i^*) + \gamma_\ell \xi_{\ell,i}^{(1)}) \frac{1 - e^{-\tau_1(\frac{1}{\mu} + v_i^*)}}{1 + \mu v_i^*} + \sum_{i=1}^{2p-2} (\beta_\ell \lambda_{\ell,i}^{(1)} + \gamma_\ell \ell_i^{(1)} h_\ell(\eta_i^*)) \frac{1 - e^{-\tau_1(\frac{1}{\mu} + \eta_i^*)}}{1 + \mu \eta_i^*} \right]$$

$$Q_2^*(\mu) = \omega_0 \sum_{\ell=2}^{2p-1} P_2^\ell(\mu) \left[(\gamma_\ell \frac{F}{4}(-1)^\ell + \xi_\ell^{(1)} \alpha_\ell + \gamma_\ell \lambda_\ell^{(1)}) \frac{1 - e^{-\tau_1(\frac{1}{\mu} + 1)}}{1 + \mu} + \sum_{i=1}^{2p-2} (\alpha_\ell \ell_i^{(1)} h_\ell(\eta_i^*) + \gamma_\ell \lambda_{\ell,i}^{(1)}) \frac{1 - e^{-\tau_1(\frac{1}{\mu} + \eta_i^*)}}{1 + \mu \eta_i^*} + \sum_{i=1}^{2p} (\alpha_\ell \xi_{\ell,i}^{(1)} + \gamma_\ell k_i^{(1)} g_\ell(v_i^*)) \frac{1 - e^{-\tau_1(\frac{1}{\mu} + v_i^*)}}{1 + \mu v_i^*} \right]$$

Les formules (11.23) à (11.28) représentent les trois types d'itérations simples possibles.

IV. Résultats

1 - Cas étudiés

Nous avons testé les formules précédentes sur trois exemples de milieux diffusants assez dissemblables dont les fonctions de phase sont tracées sur les figures (11.1) et (11.2) : la diffusion Rayleigh ou diffusion moléculaire ($\alpha = 0$), une diffusion par des particules sphériques mono-dispersées, caractérisées par leur indice $m = 1,33$ et par le paramètre de Mie $\alpha = \frac{2\pi r}{\lambda} = 2$ (r rayon des particules, λ longueur d'onde du rayonnement) et enfin une diffusion par un nuage de particules sphériques de granulométrie $n(r) = r^2 \exp\left(-\frac{r^2}{P_1}\right)$, ($P_1 = 0,8$ et $P_2 = 6$), d'indice réel $m = 1,46$ à la longueur d'onde $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$. Ce dernier cas correspond aux conditions probables des nuages supérieurs de Vénus [10]. Pour une valeur donnée de α , la convergence des séries (1.23) nécessite un développement environ de l'ordre $L \approx 2\alpha + 5$. Pour les calculs de la luminance la convergence est pratiquement réalisée pour $2p \geq \sup(L, 8)$. Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$, avec $2p = 8$ il n'y a pas de problème. Par contre pour la granulométrie, les développements sont beaucoup plus longs ($L \approx 40$) compte tenu de la présence de grosses particules. Le problème numérique devient alors compliqué, en particulier pour l'extraction des racines ν_j et η_j . Les figures (11.2), (11.3) et (11.4) montrent que l'on peut toutefois se contenter de développements beaucoup plus courts en conservant les mêmes coefficients α_ℓ, β_ℓ et γ_ℓ , mais en s'arrêtant à $L \approx 16$, les diagrammes de diffusion primaire étant déjà bien restitués. Pour des particules plus grosses, ou des longueurs d'onde plus courtes, il est certain que la résolution numérique se heurtera à des difficultés.

2. Luminance totale

Les figures (11.5 et 6) donnent pour les trois types de diffusion et pour deux épaisseurs ($\tau_1 = 0,5$ et $\tau_1 = 8$) les solutions $I_0(\mu)$, $I_1(\mu)$ et $I_2(\mu)$ comparées au résultat exact $I(\mu)$, obtenu par la méthode rigoureuse des harmoniques sphériques. Les résultats portent sur le rayonnement rediffusé en haut de la couche ($\tau = 0$). On retrouve bien que le résultat $I_0(\mu)$ est déjà excellent et d'autant meilleur que les particules ont un rayon important. Pour la diffusion Rayleigh, l'influence de la polarisation est plus forte (100% à 90° en diffusion primaire) ce qui explique l'écart à la valeur exacte. Notons aussi que $I_1(\mu)$ et $I_2(\mu)$ conduisent de toute façon à un très bon résultat même en diffusion Rayleigh.

3 - Luminance polarisée

Les figures (11.7, 8 et 9) donnent pour les mêmes cas, les solutions $Q_0(\mu)$, $Q_1(\mu)$ et $Q_2(\mu)$. Le résultat le plus surprenant est la bonne précision déjà atteinte avec $Q_0(\mu)$, surtout pour les petites particules ($\alpha = 0$ et $\alpha = 2$), et pour les épaisseurs optiques faibles. Il est assez difficile d'interpréter ce résultat, la solution n'ayant pas de signification physique rigoureuse. Notons pourtant que, si l'on supposait le rayonnement polarisé ($I(\tau; \mu) = Q(\tau; \mu)$) on pourrait négliger la source en $I(\tau; \mu')$ devant celle en $Q(\tau; \mu')$ dans (11.2) (on voit en effet, figure (11.1), que $\sum_{\ell=2}^{2p-1} \alpha_{\ell} P_{\ell}^{\ell}(\mu)$ est très supérieur à $\sum_{\ell=2}^{2p-1} \gamma_{\ell} P_{\ell}^{\ell}(\mu)$). On peut donc penser que $Q(\tau; \mu)$ correspond sensiblement au rayonnement polarisé qui se propagerait seul, à partir de la diffusion primaire. Les petites particules polarisent beaucoup plus le rayonnement, on comprendrait également que cette approximation soit meilleure pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$ que pour la granulométrie.

Le résultat est peu amélioré avec $Q_1(\mu)$, qui revient pratiquement à n'ajouter à Q_0 que le rayonnement qui se polarise dans sa dernière diffusion, avant d'émerger de la couche ($I(\tau; \mu)$ correspondant essentiellement à de la lumière naturelle). Finalement on vérifie bien que $Q_2(\mu)$ constitue une excellente approximation et se superpose à la solution rigoureuse des harmoniques sphériques.

4 - Saturation de $Q(0; \mu)$ en fonction de l'épaisseur τ_1 de la couche

Nous avons tracé sur la figure (11.10) pour quelques directions ascendantes et pour les trois milieux diffusants, $I(0; \mu)$ et $Q(0; \mu)$ en fonction de τ_1 , épaisseur optique de la couche. On confirme bien, comme cela est souvent admis, le fait que le rayonnement polarisé est formé en surface. Ce résultat s'explique bien qualitativement en remarquant que la lumière à tendance à pénétrer profondément dans la couche (la fonction de phase $\sum_{\ell=0}^{2p-1} \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu)$ ayant son maximum dans la direction avant) alors que la partie polarisée, régie par les fonctions $\sum_{\ell=2}^{2p-1} \alpha_{\ell} P_{\ell}^{\ell}(\mu)$ et $\sum_{\ell=2}^{2p-1} \gamma_{\ell} P_{\ell}^{\ell}(\mu)$ dont les maxima sont dans des directions latérales, peut ressortir beaucoup plus facilement. Les courbes (11.11) et (11.12) présentent le même phénomène de façon plus globale puisqu'on a tracé pour la granulométrie le diagramme émergent dans toutes les directions et ceci pour quelques valeurs de l'épaisseur optique τ_1 . Finalement la figure (11.13) montre, pour $\alpha = 2$ et une direction émergente que l'albédo semble avoir peu d'influence sur la saturation de Q . Notons cependant que par comparaison avec la luminance totale, la cassure située

vers $\tau_1 = 2$, semble beaucoup plus prononcée pour les albédos élevés. Au contraire pour $\omega_0 \sim 0$, on aurait exactement la même allure pour $I(\tau_1)$ et $Q(\tau_1)$ puisque la dépendance en τ_1 de ces quantités est la même en diffusion primaire.

5 - Conclusion

Nous avons donc montré que cette méthode itérative permettait un calcul précis de I et Q , tout en réduisant d'un facteur 2 l'ordre des récurrences et des polynômes utilisés.

Il apparaît également que l'on peut obtenir très simplement la quantité de lumière polarisée, sans tenir compte de la luminance totale $I(\tau; \mu)$; ce résultat ne donne toutefois qu'un ordre de grandeur, sauf pour de petites particules ou de faibles épaisseurs optiques.

Enfin nous avons vérifié le résultat fort intéressant concernant la formation du rayonnement polarisé en haut de la couche. Nous verrons par la suite comment en tirer profit pour des problèmes réels. Les calculs nous permettent de préciser l'ordre de grandeur de cette épaisseur de formation, d'environ 2 à 4; la nature précise des particules ne semble pas un facteur essentiel pas plus que l'albédo.

CHAPITRE III

EXTENSION THEORIQUE DE LA METHODE DES HARMONIQUES SPHERIQUES
EN INCIDENCE OBLIQUE

EXTENSION THEORIQUE DE LA METHODE DES HARMONIQUES SPHERIQUES

EN INCIDENCE OBLIQUE

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la résolution rigoureuse de l'équation de transfert pose, déjà pour une incidence normale, de gros problèmes numériques. Dans ce chapitre, nous généralisons de façon théorique la méthode des harmoniques sphériques en incidence oblique. Après avoir dégagé les difficultés numériques et les limites de cette méthode, nous exposerons succinctement une méthode d'approximations, dans le même esprit que celle du chapitre II, qui devrait apporter une solution approchée.

1 - Méthode rigoureuse

A partir des équations (I.18) à (I.21) on obtient, par combinaison linéaire, un système intégral-différentiel portant sur les quantités $I, Q + U, Q - U, V$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I^S(\tau; \mu)}{\partial \tau} &= I^S(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} \sum_{\ell} \beta_{\ell} P_{\ell}^S(\mu) P_{\ell}^S(\mu') d\mu' \\ &- \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} \{Q^S - U^S\} \sum_{\ell} \gamma_{\ell} P_{\ell}^S(\mu) P_{\ell}^S(\mu') d\mu' \\ &- \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} \{Q^S + U^S\} \sum_{\ell} \gamma_{\ell} P_{\ell}^S(\mu) P_{\ell}^S(\mu') d\mu' \\ &- \frac{\omega_{0F}}{4} e^{\tau/\mu_0} \sum_{\ell} \beta_{\ell} P_{\ell}^S(\mu_0) P_{\ell}^S(\mu) \end{aligned} \quad (III.1)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \{Q^S(\tau; \mu) + U^S(\tau; \mu)\} &= \{Q^S(\tau; \mu) + U^S(\tau; \mu)\} \\ &- \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} \{Q^S + U^S\} \sum_{\ell} (\alpha_{\ell} + \epsilon_{\ell}) P_{\ell}^S(\mu) P_{\ell}^S(\mu') d\mu' \\ &- \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} \{Q^S - U^S\} \sum_{\ell} (\alpha_{\ell} - \epsilon_{\ell}) P_{\ell}^S(\mu) P_{\ell}^S(\mu') d\mu' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} I^S \sum_{\ell} \gamma_{\ell} P_{S-2}^{\ell}(\mu) P_S^{\ell}(\mu') d\mu' \\
 & + \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} V^S \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} P_S^{\ell}(\mu) P_{S-2}^{\ell}(\mu') d\mu' \\
 & - \frac{\omega_0 F}{4} e^{\tau/\mu_0} \sum_{\ell} \gamma_{\ell} P_S^{\ell}(\mu_0) P_{S-2}^{\ell}(\mu)
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \{Q^S(\tau; \mu) - U^S(\tau; \mu)\} = \{Q^S(\tau; \mu) - U^S(\tau; \mu)\}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} \{Q^S - U^S\} \sum_{\ell} (\alpha_{\ell} + \epsilon_{\ell}) P_{S-2}^{\ell}(\mu) P_{S-2}^{\ell}(\mu') d\mu' \\
 & - \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} \{Q^S + U^S\} \sum_{\ell} (\alpha_{\ell} - \epsilon_{\ell}) P_{S-2}^{\ell}(\mu) P_{S-2}^{\ell}(\mu') d\mu' \\
 & - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} I^S \sum_{\ell} \gamma_{\ell} P_{S-2}^{\ell}(\mu) P_S^{\ell}(\mu') d\mu' \\
 & + \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} V^S \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} P_S^{\ell}(\mu) P_{S-2}^{\ell}(\mu') d\mu' \\
 & - \frac{\omega_0 F}{4} e^{\tau/\mu_0} \sum_{\ell} \gamma_{\ell} P_S^{\ell}(\mu_0) P_{S-2}^{\ell}(\mu)
 \end{aligned} \tag{III.3}$$

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{\partial V^S}{\partial \tau}(\tau; \mu) &= V^S(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} V^S \sum_{\ell} \partial_{\ell} P_S^{\ell}(\mu) P_S^{\ell}(\mu') d\mu' \\
 & - \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} \{Q^S + U^S\} \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} P_S^{\ell}(\mu) P_{S-2}^{\ell}(\mu') d\mu' \\
 & + \frac{\omega_0}{4} \int_{-1}^{+1} \{Q^S - U^S\} \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} P_S^{\ell}(\mu) P_{S-2}^{\ell}(\mu') d\mu'
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

(Dans ces équations les paramètres I^S , Q^S , U^S et V^S sont fonctions de τ et μ' , lorsqu'ils apparaissent sous les intégrales)

L'avantage de mettre le système sous cette forme est que l'on voit immédiatement comment il faut développer les fonctions, I , $Q + U$, $Q - U$ et V , pour obtenir la séparation des variables τ et μ . Les développements

qui s'imposent sont les suivants :

$$I^S(\tau; \mu) = \sum_{\ell=s}^{2p+s-1} (2\ell+1) g_{\ell}^S(\tau) P_S^{\ell}(\mu) \quad (III.5)$$

$$\{ Q^S(\tau; \mu) + U^S(\tau; \mu) \} = \sum_{\ell=\sup(s;2)}^{2p+s-1} (2\ell+1) h_{\ell}^S(\tau) P_{S-2}^{\ell}(\mu) \quad (III.6)$$

$$\{ Q^S(\tau; \mu) - U^S(\tau; \mu) \} = \sum_{\ell=\sup(s;2)}^{2p+s-1} (2\ell+1) f_{\ell}^S(\tau) P_{S-2}^{\ell}(\mu) \quad (III.7)$$

$$V^S(\tau; \mu) = \sum_{\ell=s}^{2p+s-1} (2\ell+1) k_{\ell}^S(\tau) P_S^{\ell}(\mu) \quad (III.8)$$

En introduisant ces développements dans le système intégral-différentiel, en utilisant les relations d'orthogonalité entre les fonctions de Legendre,

$$\int_{-1}^{+1} P_{S \pm 2}^{\ell}(\mu) P_{S \pm 2}^{\ell'}(\mu) d\mu = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

$$\text{et } \int_{-1}^{+1} P_S^{\ell}(\mu) P_S^{\ell'}(\mu) d\mu = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

puis en identifiant par rapport aux différentes fonctions de Legendre, on obtient un système différentiel en τ .

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(l+s)(l-s)}{l}} \frac{dg^S}{d\tau}{}^{l-1} + \sqrt{\frac{(l+s+1)(l-s+1)}{l+1}} \frac{dg^S}{d\tau}{}^{l+1} - (2l+1-\omega_0 \beta_l) g_l^S \\ & = -\frac{\omega_0}{2} \gamma_l f_l^S - \frac{\omega_0}{2} \gamma_l h_l^S - \frac{\omega_0 F}{4} e^{\tau/\mu_0} \beta_l P_S^l(\mu_0) \quad (III.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(l+2)(l-2)(l+s)(l-s)}{l}} \frac{dh^S}{d\tau}{}^{l-1} + \sqrt{\frac{(l+3)(l-1)(l+s+1)(l-s+1)}{l+1}} \frac{dh^S}{d\tau}{}^{l+1} \\ & - \frac{2s(2l+1)}{l(l+1)} \frac{dh^S}{d\tau}{}^l - \left\{ 2l+1 - \frac{\omega_0}{2} (\alpha_l + \varepsilon_l) \right\} h_l^S \\ & = -\frac{\omega_0}{2} (\alpha_l - \varepsilon_l) f_l^S - \omega_0 \gamma_l g_l^S + \omega_0 \varepsilon_l k_l^S - \frac{\omega_0 F}{4} e^{\tau/\mu_0} \gamma_l P_S^l(\mu_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{(l+2)(l-2)(l+s)(l-s)}{l}} \frac{df_{l-1}^S}{d\tau} + \sqrt{\frac{(l+3)(l-1)(l+s+1)(l-s+1)}{l+1}} \frac{df_{l+1}^S}{d\tau} \\
 & + \frac{2s(2l+1)}{l(l+1)} \frac{df_l^S}{d\tau} - \left\{ 2l+1 - \frac{\omega_0}{2}(\alpha_l + \xi_l) \right\} f_l^S \\
 & = -\frac{\omega_0}{2}(\alpha_l - \xi_l) h_l^S - \omega_0 \gamma_l g_l^S + \omega_0 \epsilon_l k_l^S - \frac{\omega_0}{4} e^{\tau/\mu_0} \gamma_l P_S^l(\mu_0)
 \end{aligned} \tag{III.11}$$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(l+s)(l-s)} \frac{dk_{l-1}^S}{d\tau} + \sqrt{(l+s+1)(l-s+1)} \frac{dk_{l+1}^S}{d\tau} - (2l+1 - \omega_0 \beta_l) k_l^S \\
 & + \frac{\omega_0}{2} \epsilon_l h_l^S - \frac{\omega_0}{2} \epsilon_l f_l^S
 \end{aligned} \tag{III.12}$$

La méthode classique consistera à chercher les solutions générales du système sans second membre sous la forme

$$g_l^S(\tau) = G_l^S e^{-\nu\tau} \quad ; \quad h_l^S(\tau) = H_l^S e^{-\nu\tau} \quad ; \quad f_l^S(\tau) = F_l^S e^{-\nu\tau} \quad ; \quad k_l^S(\tau) = K_l^S e^{-\nu\tau} \tag{III.13}$$

Le système différentiel sur τ (eq. III.9 à III.12) se transforme alors en un système linéaire dépendant du paramètre ν .

$$\begin{aligned}
 & \nu \{ a_l G_{l-1}^S + a_{l+1} G_{l+1}^S \} + (2l+1 - \omega_0 \beta_l) G_l^S \\
 & = \frac{\omega_0}{2} \gamma_l F_l^S + \frac{\omega_0}{2} \gamma_l H_l^S + \frac{\omega_0 F}{4} e^{\tau/\mu_0} \beta_l P_S^l(\mu_0)
 \end{aligned} \tag{III.14}$$

$$\begin{aligned}
 & \nu \{ b_l H_{l-1}^S + b_{l+1} H_{l+1}^S - c_l H_l^S \} + \left\{ 2l+1 - \frac{\omega_0}{2}(\alpha_l + \xi_l) \right\} H_l^S \\
 & = \frac{\omega_0}{2}(\alpha_l - \xi_l) F_l^S + \omega_0 \gamma_l G_l^S - \omega_0 \epsilon_l K_l^S - \frac{\omega_0 F}{4} e^{\tau/\mu_0} \gamma_l P_S^l(\mu_0)
 \end{aligned} \tag{III.15}$$

$$\begin{aligned}
 & \nu \{ b_l F_{l-1}^S + b_{l+1} F_{l+1}^S + c_l F_l^S \} + \left\{ 2l+1 - \frac{\omega_0}{2}(\alpha_l + \xi_l) \right\} F_l^S \\
 & = \frac{\omega_0}{2}(\alpha_l - \xi_l) H_l^S + \omega_0 \gamma_l G_l^S - \omega_0 \epsilon_l K_l^S - \frac{\omega_0 F}{4} e^{\tau/\mu_0} \gamma_l P_S^l(\mu_0)
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

$$\begin{aligned}
 v \{ a_\ell K_{\ell-1}^S + a_{\ell+1} K_{\ell+1}^S \} + (2\ell+1 - \omega_0 a_\ell) K_\ell^S \\
 = -\frac{\omega_0}{2} \epsilon_\ell H_\ell^S + \frac{\omega_0}{2} \epsilon_\ell F_\ell^S
 \end{aligned} \tag{III.17}$$

$$\begin{aligned}
 \text{où l'on a posé } a_\ell &= \sqrt{(\ell+s)(\ell-s)} \\
 b_\ell &= \sqrt{(\ell+2)(\ell-2)(\ell+s+1)(\ell-s+1)} \\
 c_\ell &= \frac{2s(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)}
 \end{aligned} \tag{III.18}$$

Pour que le système admette une solution, il faut que le déterminant de la matrice associée soit nul, ce qui conduit à une équation de degré $8p$ en v . Pour $s = 1$ cette équation est de degré $8p-4$. Pour $s = 0$, les paramètres U et V sont identiquement nuls, et l'équation est alors de degré $4p-2$.

Limites de calcul

Lorsque l'on résout l'équation de transfert sans polarisation seule subsiste l'équation (III.14) avec $F_\ell^S = H_\ell^S = K_\ell^S = 0$. L'équation caractéristique du déterminant associée au système est fonction de v^2 et donc de degré p en v^2 .

En incidence normale avec polarisation, l'équation caractéristique est cette fois de degré $4p-2$ en v .

Dans ces deux cas, l'extraction des racines v_i est déjà délicate compte tenu de la précision des ordinateurs et de l'allure du polynôme caractéristique (essentiellement au voisinage de $v = 1$). En particulier, sans polarisation, on semble actuellement limité à des polynômes de degré 15, puisque, dans le cas général, le degré du polynôme en v est $8p$ ceci nous donnera une valeur de p de l'ordre de 2 et on ne pourra traiter que des fonctions de phase développées en quatre termes, c'est à dire représentatives de très petites particules. Nous voyons donc que, dans l'état actuel des choses, la méthode rigoureuse des harmoniques sphériques ne semble permettre la résolution de l'équation de transfert que dans des cas très limités.

II - Méthode approchée

Les limites de la méthode étant essentiellement liées au degré du polynôme caractéristique, il est tentant de généraliser la technique d'approximations, utilisée au chapitre II, pour découpler les équations

(III.1) à (III.4) et se ramener à des équations pour lesquelles ces polynômes caractéristiques seront de degré moindre.

L'intensité dépendant peu de l'état de polarisation, on peut résoudre l'équation (III.1) en annulant Q^S et U^S au second membre. On se ramène alors à un problème maniable [11] qui est celui du calcul de la luminance en incidence oblique, mais sans polarisation.

D'autre part l'expérience montre que V^S est toujours petit devant les autres paramètres de Stokes. On le vérifiera plus loin par le calcul et ce fait est sans doute lié à ce que la diffusion primaire ne polarise que rectilignement pour une lumière incidente naturelle et un milieu isotrope (absence du terme $\omega_0 F$ dans III.4). Ceci nous permet de négliger V^S dans un premier calcul. Ces deux approximations semblent très raisonnables et permettent de découpler les équations (III.1) d'une part et (III.2 et 3) d'autre part, dans lesquelles $I(\tau; \mu)$ sera connue.

Le problème essentiel est alors de résoudre les équations en $(Q+U)$ et $(Q-U)$, sans tenir compte des termes en $I(\tau; \mu)$ et $\omega_0 F$ qui donneront lieu à de simples recherches de solutions particulières. La solution rigoureuse de ce système (III.2), (III.3) reste encore lourde. Le polynôme caractéristique associé sera de degré $4p$.

On peut envisager une dernière approximation et séparer ces deux dernières équations en négligeant la source $(Q-U)$ dans (III.2) et celle en $(Q+U)$ dans (III.3). Pour des particules assez grosses en effet ($\alpha > 3$) les coefficients α_ℓ et ξ_ℓ sont très voisins (fig III.1). Si nous supposons $(Q+U)$ et $(Q-U)$ comparables, on peut donc espérer que les sources en $(\alpha_\ell - \xi_\ell)$ seront négligeables au premier ordre devant celles en $(\alpha_\ell + \xi_\ell)$ aux seconds membres de (III.2) et (III.3). Soient $(Q+U)^{(1)}$ et $(Q-U)^{(1)}$ respectivement les solutions des équations (III.2) et (III.3) ainsi découplées. En substituant ensuite d'une part $(Q+U) = (Q+U)^{(1)}$ au second membre de (III.3) et d'autre part $(Q-U) = (Q-U)^{(1)}$ au second membre de (III.2), les solutions $(Q+U)^{(2)}$ et $(Q-U)^{(2)}$ devraient être correctes, la première itération devant déjà donner des solutions acceptables. Si au contraire $(Q+U)$ et $(Q-U)$ sont disproportionnés, l'approximation du premier ordre sera excellente pour le plus grand des deux termes et la seconde donnera le plus petit avec précision.

Développement du calcul

1) Première itération

Avec les approximations précédentes les solutions, au premier ordre, seront cherchées sur les équations découplées sous la forme

$$g_l^S(\tau) = G_l^S e^{-\nu\tau} \quad h_l^S(\tau) = H_l^S e^{-\eta\tau} \quad \text{et} \quad f_l^S(\tau) = F_l^S e^{-\rho\tau}$$

On devra résoudre trois équations caractéristiques de degré $2p$ en ν , η et ρ à partir des relations suivantes déduites de (III.14,15,16).

$$\nu \{ a_l G_{l-1}^S + a_{l+1} G_{l+1}^S + (2l+1 - \omega_0 \beta_l) G_l^S \} = 0 \quad (III.19)$$

$$\eta \{ b_l H_{l-1}^S + b_{l+1} H_{l+1}^S - c_l H_l^S \} + \left\{ 2l+1 - \frac{\omega_0}{2} (\alpha_l + \xi_l) \right\} H_l^S = 0 \quad (III.20)$$

$$\rho \{ b_l F_{l-1}^S + b_{l+1} F_{l+1}^S + c_l F_l^S \} + \left\{ 2l+1 - \frac{\omega_0}{2} (\alpha_l + \xi_l) \right\} F_l^S = 0 \quad (III.21)$$

La résolution de (III.19) a déjà été faite numériquement [11]. Nous reviendrons en fin de chapitre sur le calcul des racines η et ρ , mais on remarquera que, si on a calculé les racines η_i et les coefficients H_l^S de la relation (III.20) on aura simultanément résolu (III.21) dont la solution est $\rho_i = -\eta_i$ et $F_l^S = (-1)^l H_l^S$.

Les solutions particulières, correspondant aux termes en $\omega_0 F e^{\tau/\mu_0}$ des seconds membres, sont de la forme :

$$g_l^S(\tau) = \bar{G}_l^S e^{\tau/\mu_0}; \quad h_l^S(\tau) = \bar{H}_l^S e^{\tau/\mu_0}; \quad f_l^S(\tau) = \bar{F}_l^S e^{\tau/\mu_0}$$

(on vérifiera facilement que l'on a $\bar{F}_l^S = (-1)^l \bar{H}_l^S$)

En déterminant les constantes k_i^1 , m_i^1 et n_i^1 à partir des conditions aux limites définies précédemment (II.15), les développements de la première itération seront

$$I_1^S(\tau; \mu) = \sum_{l=s}^{s+2p} (2l+1) P_s^l(\mu) \sum_{i=1}^{2p} k_i^1 G_l^S(\nu_i) e^{-\nu_i \tau} + \bar{G}_l^S e^{\tau/\mu_0}$$

$$(Q+U)_1^S(\tau; \mu) = \sum_{l=\lambda}^{s+2p} (2l+1) P_{s-2}^l(\mu) \sum_{i=1}^{\Lambda} m_i^1 H_l^S(\eta_i) e^{-\eta_i \tau} + \bar{H}_l^S e^{\tau/\mu_0}$$

$$(Q-U)_1^S(\tau; \mu) = \sum_{l=\lambda}^{s+2p} (2l+1) P_{s-2}^l(\mu) \sum_{i=1}^{\Lambda} n_i^1 (-1)^l H_l^S(\eta_i) e^{\eta_i \tau} + (-1)^l \bar{H}_l^S e^{\tau/\mu_0}$$

avec $\lambda = \sup(s; 2)$

$\Lambda = 2p + \lambda - s$

2) Seconde itération

Cette seconde itération se ramènera à un calcul de solutions particulières tel qu'il a été exposé au chapitre II. Nous donnons ci-dessous

l'allure de la solution $(Q+U)_2^S$. On obtiendrait de la même façon $(Q-U)_2^S$ et I_2^S .

$$(Q+U)_2^S(\tau; \mu) = \sum_{\ell=\lambda}^{s+2p} (2\ell+1) P_{s-2}^\ell(\mu) \left\{ \sum_{i=1}^{\Lambda} m_i^2 H_\ell^S(\eta_i) e^{-\eta_i \tau} + \sum_{l=1}^{2p} A_l^S e^{-\nu_l \tau} + \sum_{i=1}^{\Lambda} B_l^S e^{\eta_i \tau} + C_l^S e^{\tau/\mu_0} \right\}$$

Comme nous l'avons décrit au chapitre II les oscillations des quantités I_2^S , $(Q+U)_2^S$ et $(Q-U)_2^S$ nécessiteront enfin une intégration "formelle" qui ne présente aucune difficulté.

3) Calcul des racines

On a vu au chapitre II comment s'effectuait la recherche des racines ν_i des polynômes caractéristiques $G_{2p}(v) = 0$. Nous pourrions généraliser cette méthode dans le cas des équations (III.20) et (III.21).

Reprenons le cas de l'équation (III.19); les valeurs ν_i seront les racines de $G_{2p+s}^S(v) = 0$; la relation de récurrence, initialisée par $G_{s-1}^S = 0$ et $G_s^S = 1$, s'écrit

$$v \{ a_\ell G_{\ell-1}^S(v) + a_{\ell+1} G_{\ell+1}^S(v) \} + (2\ell+1 - \omega_0 \beta_\ell) G_\ell^S(v) = 0 \quad (III.22)$$

a) On remarque d'abord que deux fonctions consécutives ne peuvent avoir de racines en commun. Si en effet ν_i est racine des fonctions $G_{\ell+1}^S(v)$ et $G_\ell^S(v)$, d'après la relation précédente, il le sera également de $G_{\ell-1}^S(v)$. De proche en proche, ν_i serait donc racine de $G_{\ell-2}^S, \dots, G_{s+1}^S$ et finalement de $G_s^S = 1$ qui n'a pas de racine.

b) La relation (III.22) s'écrit encore

$$G_{\ell+1}^S = \left\{ -a_\ell G_{\ell-1}^S - \frac{(2\ell+1 - \omega_0 \beta_\ell)}{v} G_\ell^S \right\} / a_{\ell+1} \quad (III.23)$$

$G_{\ell+1}^S$ est donc un polynôme de degré $\ell+1-s$ en $1/v$. Posons $y = 1/v$ et $X_\ell^S(y) = (-1)^{\ell+s} G_\ell^S(y)$; X_ℓ^S et G_ℓ^S auront les mêmes racines y_i et nous aurons $X_{s-1}^S = 0$ et $X_s^S = 1$. En introduisant X_ℓ^S dans (III.23) on arrive à une nouvelle récurrence :

$$X_{\ell+1}^S(y) = \frac{(2\ell+1 - \omega_0 \beta_\ell)}{a_{\ell+1}} y X_\ell^S(y) - \frac{A_\ell}{a_{\ell+1}} X_{\ell-1}^S(y) \quad (III.24)$$

Les coefficients $(2\ell+1 - \omega_0 \beta_\ell) / a_{\ell+1}$ et $a_\ell / a_{\ell+1}$ étant positifs, la relation précédente nous permet d'affirmer que les polynômes $X_\ell^S(y)$ forment une suite de Sturm {12, 13}.

Les propriétés de ces suites nous permettent d'énoncer que les racines d'un polynôme $X_{\ell+1}^S$ sont simples et réelles, et qu'elles sont séparées par les racines du polynôme X_{ℓ}^S .

Il en sera de même pour les racines v qu'on pourra donc localiser à l'ordre $\ell+1$ si elles sont connues à l'ordre ℓ . C'est cette propriété, obtenue empiriquement, qui était utilisée pour la résolution sans polarisation, ou en incidence normale. On voit qu'elle est absolument générale et elle sera également respectée par les racines η_i et ρ_i des systèmes (III.20) et (III.21). Il suffit pour ceci de montrer que l'on arrive à une relation de la même forme que (III.24). Si on considère (III.21), on obtient, en posant $y = 1/\rho$ et $X_{\ell}^S(y) = (-1)^{\ell+\lambda} F_{\ell}^S(y)$ où $\lambda = \sup(s; 2)$, la récurrence :

$$X_{\ell+1}^S(y) = \left(\frac{c_{\ell}^S}{a_{\ell+1}^S} y + \frac{b_{\ell}^S}{a_{\ell+1}^S} \right) X_{\ell}^S(y) - \frac{a_{\ell}^S}{a_{\ell+1}^S} X_{\ell-1}^S(y)$$

avec les valeurs initiales $X_{\lambda-1}^S = 0$ et $X_{\lambda}^S = 1$

Les coefficients a_{ℓ}, b_{ℓ} et c_{ℓ} étant positifs, les polynômes $X_{\ell+1}^S$ forment une suite de Sturm et par conséquent les racines ρ_i de F_{ℓ}^S encadrent les racines réelles de $F_{\ell+1}^S$. Une procédure identique à celle des v_i sera donc utilisable pour le calcul des ρ_i (ou $\eta_i = -\rho_i$).

Sur les fig (III.2) et (III.3) on a représenté l'évolution des racines d'un polynôme de type $F_{\ell}^S(y)$ lorsque l'ordre ℓ varie. Ceci est relatif à des particules de paramètre de Mie $\alpha = 2$ et d'indice $m = 1,33$. L'albédo du milieu est $\omega_0 = 0.95$ et les résultats concernent le terme $s=2$ de la décomposition en série de Fourier. Pour une valeur ℓ de l'indice on obtient $(\ell-s)$ racines. Supposons que l'on connaisse les $(\ell-s)$ racines de l'ordre ℓ . Notons les $y_{\ell}^1, y_{\ell}^2, \dots, y_{\ell}^{\ell-s}$. A l'ordre $\ell+1$ il faudra calculer $y_{\ell+1}^1, y_{\ell+1}^2, \dots, y_{\ell+1}^{\ell-s}, y_{\ell+1}^{\ell-s+1}$. On remarque que $y_{\ell}^1 = y_{\ell+1}^1, y_{\ell}^2 = y_{\ell+1}^2, \dots, y_{\ell}^{\ell-s-1} = y_{\ell+1}^{\ell-s-1}$. On pourra ainsi déduire $y_{\ell+1}^j$ ($j < \ell-s-1$) de y_{ℓ}^j par un développement limité puisque les deux racines sont voisines. En factorisant $F_{\ell+1}^S(y)$ à partir de ces $(\ell-s-1)$ premières racines, on comprend facilement que $y_{\ell+1}^{\ell-s}$ et $y_{\ell+1}^{\ell-s+1}$ s'obtiendront en résolvant une équation du second degré. On appliquera cette procédure de proche en proche jusqu'à obtenir les racines de F_{2p+s}^S .

III - Conclusion

La méthode des harmoniques sphériques est donc généralisable, pour le calcul du rayonnement polarisé, en incidence oblique, mais elle ne semble techniquement applicable que dans le cas très restreint de très petites particules.

La méthode d'approximation suggérée permettrait de découpler le système d'équations différentielles, mais resterait néanmoins limitée : en supposant qu'on ne puisse extraire que les racines de polynômes de degré 20 environ, ceci ne permettrait de considérer que des particules de l'ordre de $\alpha = 5$.

En tout état de cause, il serait nécessaire de justifier les différentes approximations nécessaires au calcul approché. Nous avons donc choisi de programmer la méthode des ordres successifs de diffusion, dont le gros défaut est de nécessiter des temps de calcul beaucoup plus longs que ceux auxquels conduit la méthode des harmoniques sphériques, mais qui ne recèle que peu de difficultés numériques et présente par ailleurs l'intérêt de donner des renseignements intéressants sur la façon dont le rayonnement diffus se polarise dans la couche, de diffusion en diffusion.

CHAPITRE IV

METHODE DES ORDRES SUCCESSIFS DE DIFFUSION

METHODE DES ORDRES SUCCESSIFS DE DIFFUSION

I - Principe de la méthode

Reprenons les équations intégral-différentielles (I.18 à 21) et mettons les sous forme intégrale en séparant le rayonnement montant (indice "plus") et le rayonnement descendant (indice "moins")

$$I_+^{(s)}(\tau; \mu) = \int_{\tau}^{\tau_1} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} S_i^{(s)}(t; \mu, \mu') d\mu' \quad (IV.1)$$

$$Q_+^{(s)}(\tau; \mu) = \int_{\tau}^{\tau_1} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} S_q^{(s)}(t; \mu, \mu') d\mu' \quad (IV.2)$$

$$U_+^{(s)}(\tau; \mu) = - \int_{\tau}^{\tau_1} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} S_u^{(s)}(t; \mu, \mu') d\mu' \quad (IV.3)$$

$$V_+^{(s)}(\tau; \mu) = \int_{\tau}^{\tau_1} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} S_v^{(s)}(t; \mu, \mu') d\mu' \quad (IV.4)$$

avec

$$S_i^{(s)}(t; \mu, \mu') = I^{(s)}(t; \mu') A^{(s)}(\mu, \mu') + Q^{(s)}(t; \mu') B^{(s)}(\mu, \mu') - U^{(s)}(t; \mu') C^{(s)}(\mu, \mu') \quad (IV.5)$$

$$S_q^{(s)}(t; \mu, \mu') = I^{(s)}(t; \mu') B^{(s)}(\mu', \mu) + Q^{(s)}(t; \mu') D^{(s)}(\mu, \mu') - U^{(s)}(t; \mu') E^{(s)}(\mu, \mu') - V^{(s)}(t; \mu') G^{(s)}(\mu, \mu') \quad (IV.6)$$

$$S_u^{(s)}(t; \mu, \mu') = I^{(s)}(t; \mu') C^{(s)}(\mu', \mu) + Q^{(s)}(t; \mu') E^{(s)}(\mu', \mu) - U^{(s)}(t; \mu') F^{(s)}(\mu, \mu') + V^{(s)}(t; \mu') H^{(s)}(\mu', \mu) \quad (IV.7)$$

$$S_V^{(s)}(t; \mu, \mu') = -Q^{(s)}(t; \mu') G^{(s)}(\mu, \mu') + U^{(s)}(t; \mu') H^{(s)}(\mu, \mu') + V^{(s)}(t; \mu') J^{(s)}(\mu, \mu') \quad (IV.8)$$

Les quantités A, B, C, D, E, F, G, H, et J ont été définies en (I.22). Les quantités $I_-^{(s)}(\tau; \mu')$, $Q_-^{(s)}(\tau; \mu')$, $U_-^{(s)}(\tau; \mu')$ et $V_-^{(s)}(\tau; \mu')$ relatives au rayonnement descendant sont du même type. Seule change l'intégration

sur t : $\int_{\tau}^{\tau_1} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu}$ devient $\int_0^{\tau} e^{-(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{\mu}$

$$I^{(s)}(\tau; \mu) = \int_0^{\tau} e^{-(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{\mu} \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} S_i^{(s)}(t; \mu, \mu') d\mu'$$

où $S_i^{(s)}$ est défini par (IV.5)

Pour chaque s donné (on omettra maintenant cet indice) on calculera, pour chaque ordre n de diffusion, $I^{(n)}$, $Q^{(n)}$, $U^{(n)}$ et $V^{(n)}$ en substituant aux seconds membres des équations intégrales $I^{(n-1)}$, $Q^{(n-1)}$, $U^{(n-1)}$ et $V^{(n-1)}$. La solution est immédiate. $I_+^{(n)}(\tau; \mu)$ s'écrit par exemple :

$$I_+^{(n)}(\tau; \mu) = \int_{\tau}^{\tau_1} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} S_i^{(n-1)}(t; \mu, \mu') d\mu' \quad (IV.9)$$

avec cette fois

$$S_i^{(n-1)}(t; \mu, \mu') = I_+^{(n-1)}(t; \mu') A(\mu, \mu') + Q^{(n-1)}(t; \mu') B(\mu, \mu') - U^{(n-1)}(t; \mu') C(\mu, \mu') \quad (IV.10)$$

Il en est de même pour Q^n, U^n et V^n à partir des équations (IV.2) à (IV.4) et (IV.6) à (IV.8).

La solution s'amorcera à partir de I^1, Q^1, U^1 et V^1 correspondant à la diffusion primaire. Lorsque le milieu diffusant est homogène et éclairé par un faisceau parallèle, ces quantités s'expriment sous forme littérale.

$$I_{\pm}^1(\tau; \mu) = X^{\pm}(\tau, \tau_1; \mu, \mu_0) A(\pm \mu, \mu_0)$$

$$Q_{\pm}^1(\tau; \mu) = X^{\pm}(\tau, \tau_1; \mu, \mu_0) D(\pm \mu, \mu_0)$$

$$U_{\pm}^1(\tau; \mu) = -X_{\pm}^{\pm}(\tau, \tau_1; \mu, \mu_0) F(\pm\mu, \mu_0) \quad (IV.11)$$

$$V_{\pm}^1(\tau, \mu) = 0$$

avec

$$X_{\pm}^+(\tau, \tau_1; \mu, \mu_0) = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu} \frac{\omega_0 F}{4} (1 - e^{-(\tau_1 - \tau)} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0} \right))$$

$$X_{\pm}^-(\tau, \tau_1; \mu, \mu_0) = \frac{\mu_0}{\mu_0 - \mu} \frac{\omega_0 F}{4} (1 - e^{-\tau} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0} \right))$$

où μ et μ_0 sont définis positifs.

Les équations précédemment exposées supposent un milieu diffusant homogène. Il n'y a cependant aucune difficulté de principe à introduire des inhomogénéités fonction de l'épaisseur optique τ . En particulier si on suppose que l'albédo est une fonction de τ , reprenons par exemple l'équation (IV.9), il suffit de transformer $S_i^{(n-1)}(t; \mu, \mu')$ en $\omega_0(\tau) \times S_i^{(n-1)}(t; \mu, \mu')$. Plutôt que d'imaginer une inhomogénéité continue, on peut très bien résoudre le problème plus simple de la superposition de plusieurs couches sans grande complication, ce qui n'est pas le cas par les harmoniques sphériques, même lorsqu'il n'y a que deux couches.

II - Méthode d'intégration

Il reste maintenant à opérer la double intégration sur τ et sur μ dans les équations du même type que (IV.9). Nous ne discuterons pas ici des différentes méthodes possibles mais simplement de la validité de celle que nous avons choisie.

a) Intégration sur μ

On a choisi comme discrétisation la quadrature de Gauss qui, avec N termes, donne l'intégration exacte d'un polynôme de degré $2N$, sur l'intervalle $-1, +1$, soit

$$\int_{-1}^{+1} f(\mu) d\mu = \sum_{j=-N}^{j=N} a_j f(\mu_j)$$

Les points de Gauss μ_j (zéros du polynôme de Legendre $P_{2N}(\mu)$ et les poids de Gauss a_j sont des quantités tabulées. On a de plus les relations $\mu_{-j} = -\mu_j$ et $a_{-j} = a_j$.

Les fonctions que nous désirons intégrer ne sont pas des polynômes

de μ (Il suffit pour s'en convaincre de regarder comment intervient μ dans les expressions de la diffusion primaire). Il faut donc tester le nombre de points de Gauss nécessaire à une précision acceptable. On a représenté sur la courbe (IV.1) la luminance sortant d'une couche éclairée en incidence normale ($\tau_1 = 8$; $\omega_0 = 0,95$) et pour une granulométrie correspondant sensiblement aux nuages de Vénus pour une longueur d'onde $\lambda = 1,5$ microns. L'ordre du développement des éléments de la matrice de phase était $2p = 14$. Le résultat, comparé à la solution des harmoniques sphériques, a été effectué en prenant $N_1 = 8$ puis $N_2 = 14$ points de Gauss. L'accord est déjà excellent avec $N = 8$. Par la suite nous avons gardé comme critère $N > p$, qui s'est toujours révélé satisfaisant.

b) Intégration sur τ

Considérons l'exemple de la luminance ascendante, donnée en (IV.9). Après intégration sur μ' , cette luminance se met sous la forme :

$$I_+^{(n)}(\tau; \mu) = \int_{\tau}^{\tau_1} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} f(t) \tag{IV.12}$$

L'intégration sur τ se fera en discrétisant la couche. Posons $\tau = q\Delta\tau$ et $\tau_1 = p\Delta\tau$. Pour calculer $I_+^{(n)}(\tau, \mu)$ on peut faire apparaître $I_+^{(n)}(\tau + \Delta\tau, \mu)$ en décomposant (IV.12) comme suit :

$$I_+^{(n)}(\tau, \mu) = \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} f(t) + \int_{\tau + \Delta\tau}^{\tau_1} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} f(t)$$

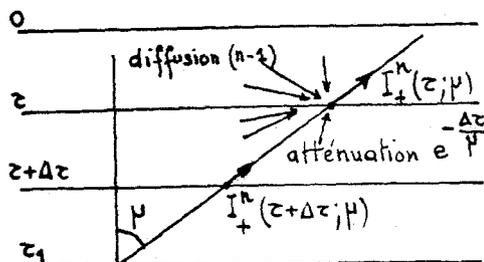
Soit encore

$$I_+^{(n)}(\tau; \mu) = e^{-\frac{\Delta\tau}{\mu}} \int_{\tau + \Delta\tau}^{\tau_1} e^{-(t-\tau-\Delta\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} f(t) + \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} f(t)$$

et finalement

$$I_+^{(n)}(\tau; \mu) = e^{-\frac{\Delta\tau}{\mu}} I_+^{(n)}(\tau + \Delta\tau, \mu) + \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} f(t) \tag{IV.13}$$

Le premier terme de cette expression est relatif au rayonnement diffusé n fois et qui arrive au point $(\tau; \mu)$ en provenance du point $(\tau + \Delta\tau; \mu)$. L'exponentielle $\exp(-\Delta\tau/\mu)$ correspond à l'atténuation du faisceau entre les deux points.



Le second terme concerne le rayonnement diffusé $(n-1)$ fois, qui arrive de toutes les directions au point (τ, μ) et μ est rediffusé une $n^{\text{ième}}$ fois dans la direction μ .

On voit maintenant comment va se développer le processus d'intégration sur τ . Pour le rayonnement ascendant (expression IV.13) on partira du fond de la couche $\tau = \tau_1$ et, de proche en proche, on en déduira le rayonnement d'ordre n à toutes les profondeurs pour une direction donnée μ , ce qui permettra de calculer à ces profondeurs les quantités $f(t)$ qui interviendront à l'ordre $(n+1)$. C'est ici qu'apparaîtra la condition limite sur le fond de la couche, pour initialiser $I_+^{(n)}(\tau_1, \mu)$ que nous prendrons nul par la suite en supposant que le fond de la couche est noir.

On obtient de la même façon, l'expression de la luminance descendante :

$$I_-^{(n)}(\tau; \mu) = e^{-\frac{\Delta\tau}{\mu}} I_-^{(n)}(\tau - \Delta\tau, \mu) + \int_{\tau - \Delta\tau}^{\tau} e^{-(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{\mu} f(t) \quad (IV.14)$$

Le processus s'amorcera cette fois en partant du haut de la couche $\tau = 0$ et en utilisant la condition limite suivant laquelle aucun rayonnement diffusé ne descend du haut de cette couche, soit $I_-^{(n)}(0; \mu) = 0$, puisqu'on ne considérera que le cas d'un faisceau incident parallèle et naturel. La généralisation au cas de sources diffuses connues en surface et au fond serait immédiate.

Il reste maintenant à évaluer les intégrales qui apparaissent dans (IV.13) et (IV.14) et aussi à évaluer la précision du calcul, suivant la finesse de la discrétisation sur τ . Soit le terme général à intégrer :

$$\int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} f(t) = \int_0^{\tau} e^{-x/\mu} \frac{dx}{\mu} f(x + \tau) \quad (IV.15)$$

Les diffusions multiples ont tendance à homogénéiser le rayonnement dans la couche, et la fonction $f(x)$ à intégrer varie de plus en plus lentement avec l'ordre de diffusion. Pratiquement c'est en diffusion

primaire que la source, exponentielle, varie le plus vite avec l'épaisseur optique, aussi nous placerons nous dans ce cas défavorable pour évaluer la précision d'intégration.

On pourra en général considérer que $f(x) \approx Ae^{-kx}$ sur un petit intervalle $\Delta\tau$, avec $k < 1/\mu_0$. Ceci est rigoureux en diffusion primaire avec $k = 1/\mu_0$. Pour exprimer simplement (IV.15) en fonction des quantités $f(\tau)$ et $f(\tau+\Delta\tau)$, (qu'on déterminera de proche en proche par le calcul) tout en conservant la précision sur le résultat, le mieux que l'on puisse faire est de linéariser $f(x)$ sur l'intervalle considéré.

Posons donc $f(x) = Ae^{-kx}$ et $g(x) = ax+b$ ce qui donne par identification

$$b = A \quad \text{et} \quad a = \frac{A(e^{-k\Delta\tau} - 1)}{\Delta\tau}$$

En intégrant (IV.15) avec les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$, ce qui donne I_f et I_g respectivement, puis en développant par rapport à $\Delta\tau$ jusqu'au troisième ordre, il vient

$$\frac{I_f - I_g}{A} = \frac{k^2 \Delta\tau^3}{12}$$

soit une erreur relative :

$$\frac{I_f - I_g}{I_f} \approx \frac{k^2 \Delta\tau^2}{12} \quad (\text{avec } I_f \approx A\Delta\tau, \text{ partie principale})$$

La formule d'intégration sera :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} f(t) = \frac{\mu}{\Delta\tau} \{ f(\tau+\Delta\tau) - f(\tau) \} (1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\mu}}) + f(\tau) - f(\tau+\Delta\tau) e^{-\frac{\Delta\tau}{\mu}}$$

et une formule du même genre pour le rayonnement descendant.

On a donc l'erreur relative commise sur chaque intégrale intervenant dans le calcul du rayonnement. Avant de chercher à évaluer les variations possibles du coefficient k , on remarque que, compte tenu des conditions aux limites rencontrées, la fonction à intégrer présente une discontinuité en $\tau=0$ et $\tau=\tau_1$. On aura donc intérêt à serrer le pas $\Delta\tau$ en ces zones. Le choix des découpages différents dans certaines zones de la couche ne présente aucune difficulté particulière. Par ailleurs, le plus souvent on ne s'intéressera qu'au rayonnement rediffusé par la couche (cas des planètes observées depuis la terre). Il est évident que, les sources

interviennent d'autant moins dans ce rayonnement sortant en haut de la couche qu'elles sont profondes. On pourra donc se contenter d'une intégration moins précise en profondeur et y prendre un pas $\Delta\tau$ plus grand. Ces deux remarques sont importantes du point de vue pratique, les temps de calcul étant directement proportionnels au nombre de sous-couches qui sera un facteur essentiel pour l'exploitation numérique.

Evaluation de k

Les tests ont été réalisés en incidence normale ($\mu_0 = 1$) pour une granulométrie de Vénus ($\lambda = 1,5$ microns), un albédo $\omega_0 = 0,98$ et une épaisseur optique $\tau_1 = 25,2$. La couche était ainsi discrétisée :

- $\Delta\tau_1 = 0,1$ de $\tau = 0$ à $\tau = 1,2$ (sous couche 1)
- $\Delta\tau_2 = 0,4$ de $\tau = 1,2$ à $\tau = 9,2$ (sous couche 2)
- $\Delta\tau_3 = 1$ de $\tau = 9,2$ à $\tau = 25,2$ (sous couche 3)

Pour chaque ordre de diffusion, on a calculé un coefficient k approché :

$$k = \text{Log} \left| \frac{f(\tau + \Delta\tau) - f(\tau)}{\Delta\tau} \right|$$

On a porté dans le tableau (IV.1) la valeur maximale $\frac{k^2 \Delta\tau^2}{12}$ obtenue sur chacune des trois couches caractérisées par $\Delta\tau_i$ ($i=1,2,3$).

Tableau (IV.1)

$$\frac{\Delta I}{I} \cdot 10^3$$

ordre de diffusion	$\Delta\tau_1 = 0,1$	$\Delta\tau_2 = 0,4$	$\Delta\tau_3 = 1$
1	0,75	9	33
2	0,32	5,6	16
3	2,8	8,4	16
4	1,8	4,7	23
5	1,15	3,7	14
10	0,74	1,6	11,5
20	0,38	0,56	7,6
40	0,34	0,66	3,2

En analysant le tableau par ligne on vérifie évidemment que l'imprécision croît avec $\Delta\tau$, et pour une même colonne que l'erreur est maximale sur les premières diffusions (le régime étant encore fortement dissymétrique). On voit que la précision obtenue (de l'ordre de 1% sur les plus basses couches) est tout à fait tolérable.

Tableau (IV.2)

	μ	96 couches	48 couches	24 couches
I primaire	0,9894	0,03414	0,03419	0,03438
	0,8656	0,03590	0,03595	0,03613
			1°/∞	1°/∞
	0,6179	0,02212	0,02214	0,02223
	0,2816	0,02788	0,02790	0,02797
Q primaire	0,9894	0,009185	0,009198	0,009249
	0,8656	0,008905	0,008917	0,008962
			1°/∞	1°/∞
	0,6179	0,003252	0,003255	0,003268
	0,2816	0,003950	0,003953	0,003963
I ⁴ diffusion 4	0,9894	0,02194	0,02198	0,02213
	0,8656	0,02263	0,02266	0,02278
			3°/∞	1°/∞
	0,6179	0,02455	0,02455	0,02456
	0,2816	0,02405	0,02399	0,02376
Q ⁴ diffusion 4	0,9894	0,0000731	0,0000732	0,0000736
	0,8656	0,000790	0,0007913	0,000795
			3°/∞	1°/∞
	0,6179	0,001754	0,001754	0,001754
	0,2916	0,002158	0,002153	0,002137



Pour la même couche, on a reporté (tableau (IV.2)) les quantités I et Q correspondant à de la lumière diffusée une fois et quatre fois à $\tau = 0$ et pour quelques angles μ d'émergence. Chaque colonne correspond à une discrétisation différente dans les sous couches 1,2 et 3 soit

				total
1 ^{er} cas	$\Delta\tau_1 = 0,05$	$\Delta\tau_2 = 0,2$	$\Delta\tau_3 = 0,5$	soit 96 couches
2 ^e cas	$\Delta\tau_1 = 0,1$	$\Delta\tau_2 = 0,4$	$\Delta\tau_3 = 1$	soit 48 couches
3 ^e cas	$\Delta\tau_1 = 0,2$	$\Delta\tau_2 = 0,8$	$\Delta\tau_3 = 2$	soit 24 couches

On peut considérer comme pratiquement exact le résultat obtenu avec 96 pas. L'erreur relative obtenue pour les deux autres cas et portée entre les colonnes, reste du même ordre de grandeur pour ces deux diffusions d'ordre différent. Ce résultat se confirme quelque soit l'ordre de diffusion.

Conclusion

Finalement, pour nos calculs du rayonnement ressortant en haut de la couche, nous discrétiserons en trois sous couches :

dans la sous couche supérieure, de l'ordre de $\tau_1 = 1$, on s'arrangera toujours pour respecter la condition $\frac{\Delta\tau_1^2}{12\mu_0^2} < 1\%$. (on pourra prendre $\Delta\tau_1 = 0,1$ qui convient bien pour $0,3 < \mu_0 < 1$)

dans la sous couche intermédiaire on prendra $\Delta\tau_2$ de l'ordre de 0,4, sur une épaisseur τ_2 de l'ordre de 4.

Si la couche totale est épaisse, on complétera alors, jusqu'au fond de cette couche, en prenant un large pas $\Delta\tau_3 = 1$.

III - Longueur du développement en série de Fourier

Si les différents éléments de la matrice de phase sont développés avec $2p$ termes, la décomposition en série de Fourier doit théoriquement s'effectuer avec $2p$ termes également. Pour la luminance I toutefois les différents termes I^s de cette décomposition convergent avec s , et d'autant plus vite que μ_0 est grand (à la limite, pour l'incidence normale seul le terme $s = 0$ est à considérer). La figure (IV.2) montre comment convergent avec s les différents paramètres de Stokes, pour des particules de paramètre $\alpha = 2$. Ici les quantités Q^s et U^s se comportent comme I^s .

Pour de grosses particules (granulométrie de Vénus à $\lambda = 0,527$ microns) les résultats sont très différents. Les séries de I^s convergent encore vite (à 1‰ en moins de dix termes pour $\mu_0 = 0,5$ [14]) mais les termes de polarisation, (figures IV.3 à IV.8) ont un comportement plus anarchique. La convergence dépend ici aussi bien de μ et ϕ que de μ_0 . L'analyse de ces courbes montre que les plus fortes anomalies de convergence apparaissent

au voisinage des directions d'observation qui correspondent à un zéro de polarisation en diffusion primaire, ce qui est assez logique. Comme il s'agit de directions pour lesquelles l'intensité polarisée reste finalement faible, le problème n'est pas crucial, mais il est clair que ce comportement oscillatoire des séries ne facilite pas l'exploitation numérique, et qu'à ce stade une étude soignée de la convergence est nécessaire.

IV - Nombre de diffusions

Il reste à étudier l'influence des différents paramètres (albédo, nature du paramètre de Stokes étudié, incidence μ_0 , ordre s de la décomposition en série de Fourier) sur le nombre de diffusions nécessaire pour obtenir une précision donnée.

a) Influence de l'albédo

La convergence est d'autant plus rapide que le milieu est plus absorbant. L'équation de transfert étant linéaire en ω_0 , pour une couche semi-infinie, on peut écrire, en supposant le problème résolu pour $\omega_0 = 1$,

$$I^S(\tau; \mu, \omega_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_0^n I_n^S(\tau; \mu, \omega_0 = 1),$$

où I_n^S est la valeur obtenue à la $n^{\text{ème}}$ diffusion, et la convergence sera d'autant plus rapide que ω_0 sera petit, pour tous les paramètres de Stokes.

b) Influence du paramètre de Stokes étudié

On sait aussi que le rayonnement polarisé doit se former à partir de faibles ordres de diffusion : en effet, il possède un axe privilégié si bien qu'au cours d'une diffusion, si cet axe ne se trouve pas dans le plan de diffusion (ou perpendiculaire à ce plan) il y a perte de rendement pour la polarisation; c'est ce qui fait dire que les diffusions multiples "dépolarisent" le rayonnement. Sur les figures (IV.9 et 10) on a tracé l'intensité diffuse et l'intensité polarisée remontant d'une couche éclairée en incidence normale, en tenant compte des diffusions successives jusqu'à un ordre maximum croissant. On constate bien que la valeur finale du rayonnement polarisé est atteinte avec un nombre de diffusions très inférieur à celui nécessaire pour obtenir l'intensité totale.

Convergence en série géométrique

Pour une valeur fixée, on constate enfin que les diffusions successives, au delà d'un certain ordre, suivent une série géométrique comme le montrent les figures (IV.11 et 12) sur lesquelles la série géométrique

est atteinte lorsque les courbes deviennent linéaires (échelle semi-logarithmique). Ce résultat était déjà signalé dans le cas du calcul de l seul [15]. Il reste valable pour les autres paramètres et il est très intéressant. En effet dès qu'on constatera que la série géométrique est assez précisément établie, à un ordre N de diffusion, on pourra arrêter le calcul et ajouter un terme correctif représentant les diffusions d'ordre N+1 à l'infini, avec

$$Q^S(o, \mu) = \sum_{n=1}^{N-1} Q_N^S(o, \mu) + \frac{Q_N^S(o; \mu)}{1 - \frac{Q_N^S(o; \mu)}{Q_{N-1}^S(o; \mu)}}$$

c) Influence de la valeur de s et de l'incidence μ_0

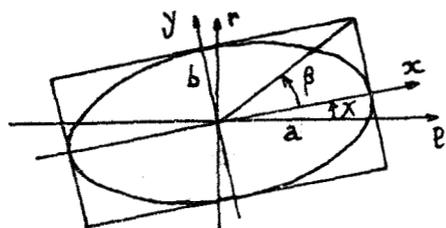
On a enfin porté dans le tableau (IV.3) le nombre de diffusions nécessaire à une précision donnée, en fonction de l'incidence μ_0 et de l'ordre s du développement en série de Fourier, pour la granulométrie de Vénus à $\lambda = 0,527 \mu\text{m}$ ce nombre décroît sensiblement avec l'ordre s mais dépend assez peu de l'incidence.

Tableau (IV.3)

$s \backslash \mu_0$	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3
0	10	8	6	22	13
1	11	11	8	8	14
2	14	16	8	7	7
3	6	8	7	9	9
4	6	9	6	7	5
5	6	6	7	7	4
6	4	3	5	6	7
7	4	5	6	5	6
8	4	3	4	4	4
9	4	4	5	4	4
10	4	4	5	7	6
15	4	4	4	5	4
20	-	2	3	3	5
25	-	-	-	3	4
30	-	-	-	-	3
35	-	-	-	-	3

V - Choix des grandeurs physiques étudiées

La méthode de calcul nous fournit les paramètres de Stokes I, Q, U et V. On préfère en général relier ces quantités à des grandeurs plus physiques en fonction des paramètres classiques de la vibration elliptique



$$\begin{aligned}
 I &= I^{nat} + I^{pol} \\
 Q &= |I^{pol}| \cos 2\beta \cos 2x \\
 U &= |I^{pol}| \cos 2\beta \sin 2x \\
 V &= |I^{pol}| \sin 2\beta
 \end{aligned}$$

La luminance totale I a été décomposée en luminance naturelle I^{nat} et totalement polarisée I^{pol} .

Les quantités physiques utilisées seront les suivantes :

- la luminance totale I
- Le taux de polarisation $\rho = \frac{I^{pol}}{I} = \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I}$
- l'angle x $\operatorname{tg} 2x = \frac{U}{Q}$
- l'angle β $\sin 2\beta = \frac{V}{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}$

Remarque sur l'ellipticité

On considère en général que le rayonnement diffusé est polarisé rectilignement c'est à dire que l'ellipticité est très faible. Expérimentalement c'est ce que l'on observe sur Vénus à laquelle nous nous intéresserons dans le chapitre suivant.

Dans le tableau (IV.4) nous avons porté, en fonction de l'angle μ d'émergence et pour $\phi = \frac{\pi}{4}$, l'erreur relative commise sur le taux de polarisation en négligeant le paramètre V et aussi la valeur de l'angle β caractéristique de l'ellipticité. Ces résultats ont été obtenus pour des particules $\alpha=2$ ($\tau_1=4; \omega_0 = 0,95; \mu_0 = 0,5$)

Tableau (IV.4)

μ	$\frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2} - \sqrt{Q^2+U^2}}{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}} \cdot 10^6$	$-\beta \times 10^3$
0.9815	6.54	1.888
0.9041	5.26	1.604
0.7699	1.44	0.849
0.5873	0.008	0.060
0.3678	0.031	0.126
0.1252	3.17	1.26

On constate bien que V n'a qu'une influence très faible sur le taux de polarisation et que l'ellipticité de la vibration est très faible et nous la négligerons par la suite dans nos calculs.

VI - Etude des hypothèses du chapitre III

Nous avons cherché à vérifier les hypothèses simplificatrices envisagées plus haut pour traiter le cas de l'incidence oblique par les harmoniques sphériques.

a) L'une de ces approximations reposait sur le fait que les coefficients α_ℓ et ϵ_ℓ sont en général voisins. Le tableau (IV.5) compare à la solution exacte le résultat obtenu (par les ordres successifs) en faisant $\epsilon_\ell = \alpha_\ell$ pour des particules $\alpha=2$ ($\tau_1 = 4$; $\omega_0 = 0,95$; $\mu_0 = 0,5$; $s = 4$)

Tableau (IV.5)

μ	$Q \times 10^3$		$U \times 10^3$	
	exact	approché	exact	approché
0.9815	-0.0670	-0.0636	0.0663	0.0671
0.9041	-0.366	-0.349	0.363	0.366
0.7699	-0.941	-0.906	0.931	0.938
0.5873	-1.807	-1.754	1.752	1.762
0.3678	-2.968	-2.904	2.630	2.638
0.1252	-4.612	-4.552	3.015	3.011

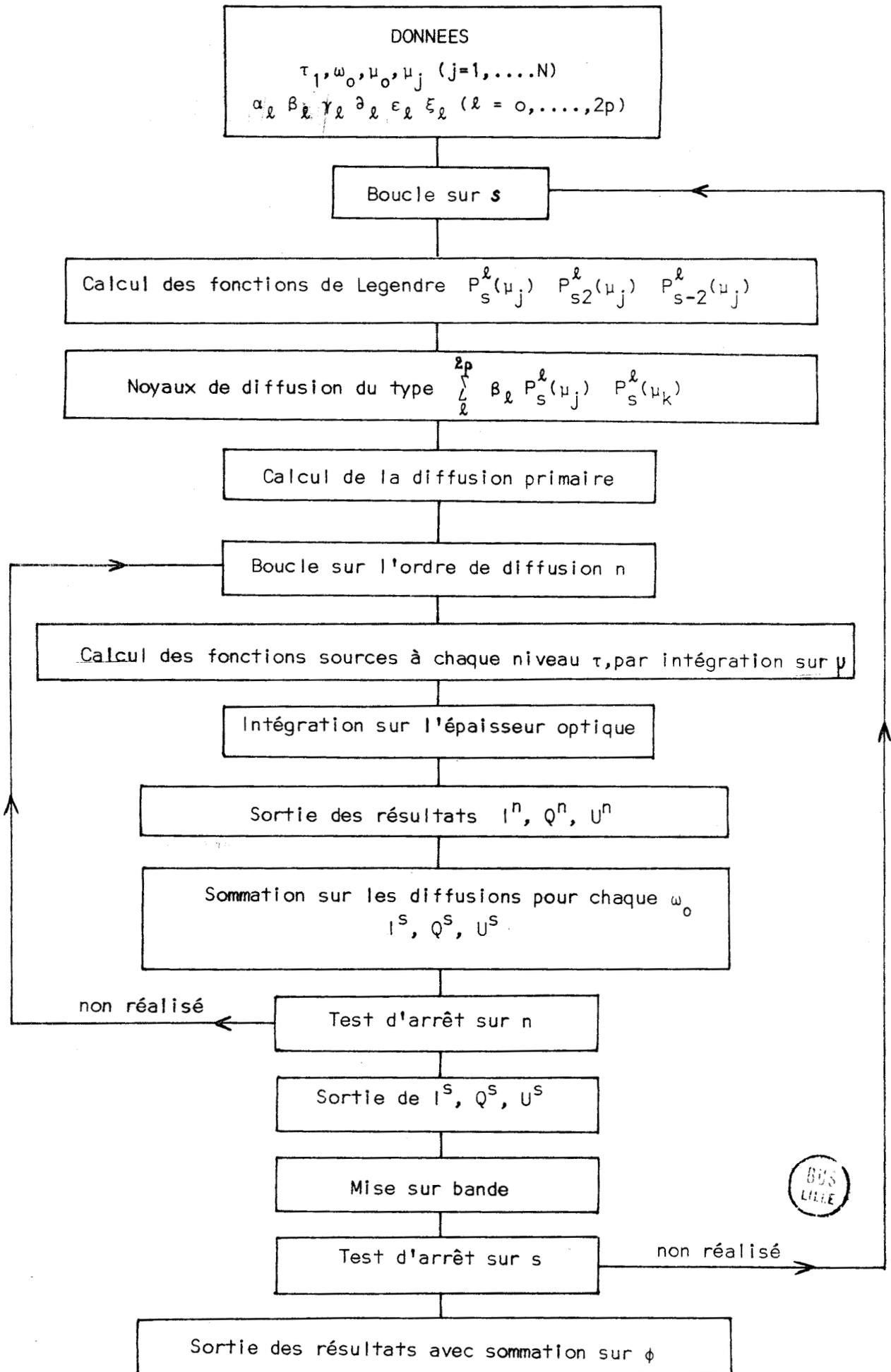
On constate que les résultats sont peu perturbés par cette approximation bien que l'on ne soit pas dans un cas très favorable ($\alpha < 3$)

b) Nous avons également cherché à voir si la faible influence de la source en l ($\tau; \mu$) sur Q et U subsistait, comme en incidence normale. Les résultats ci-dessous montrent que, pour $s = 1$, l'approximation n'est pas trop mauvaise.

μ	$Q \times 10^2$		$U \times 10^2$	
	exact	approché	exact	approché
0,9815	-0.661	-0.354	0.669	0.356
0,9041	-1.493	-0.908	1.648	0.937
0,7699	-2.454	-1.639	2.886	1.811
0,5873	-3.201	-2.474	4.457	3.139
0,3678	-3.429	-3.100	6.295	5.047
0,1252	-2.774	-2.968	7.918	7.476

et on peut espérer qu'en introduisant au second membre l'intensité totale, calculée indépendamment, on se rapprochera nettement de la valeur exacte.





CHAPITRE V

ETUDE DE LA POLARISATION LOCALISEE DE VENUS

Dans cette dernière partie, nous appliquerons notre méthode de calcul à l'étude du rayonnement rediffusé par Vénus. Son atmosphère diffusante épaisse est encore assez mal connue mais de nombreux résultats expérimentaux existent et il est probable qu'à l'occasion des prochains survols de la planète (Mariner) ils seront encore développés. L'atmosphère de Vénus est essentiellement composée de gaz carbonique [16] mais la nature des nuages reste par contre très controversée. Leur étude repose encore uniquement sur l'analyse des observations terrestres de la luminance rediffusée, intégrée sur toute la surface visible du disque. Les mesures de polarisation semblent indiquer en haute atmosphère des particules d'indice $n = 1,46$ et de rayon moyen $r = 1,1 \mu\text{m}$ [10]. L'albédo sphérique de la planète [17] correspond à des particules très peu absorbantes [18]. Enfin le premier sondage par Vénéra 8 permet d'estimer l'épaisseur optique totale des nuages à $\tau_1 = 100$ environ. Notre but est de voir si l'analyse du taux de polarisation et de la direction du plan de polarisation, résolus sur le disque, permettrait de raffiner ces résultats ou de tester certaines des hypothèses d'homogénéité admises dans les analyses précédentes. Ce problème est évidemment très vaste compte tenu des nombreux paramètres qui interviennent. Nous montrerons simplement ici comment adapter la méthode de calcul au milieu physique considéré et quels sont les paramètres dont l'influence peut être étudiée. Ensuite nous discuterons les premiers résultats obtenus.

1- Adaptation de la méthode de calcul

A partir de la granulométrie et de l'indice présumés des particules on peut tabuler les coefficients α_λ , β_λ , γ_λ , δ_λ , ϵ_λ , ξ_λ introduits dans les développements de la matrice de phase. Pour les longueurs d'onde visibles, l'ordre de ces développements est, pour un rayon moyen des particules de $1,1 \mu\text{m}$, d'une centaine. D'autre part la discrétisation d'une couche d'épaisseur $\tau_1 = 100$ (ordre de grandeur de l'épaisseur optique des nuages) nécessiterait une centaine d'intervalles $\Delta\tau$. Enfin l'albédo des particules

étant proche de 1 (milieu très diffusant) les diffusions multiples interviendront jusqu'à des ordres élevés.

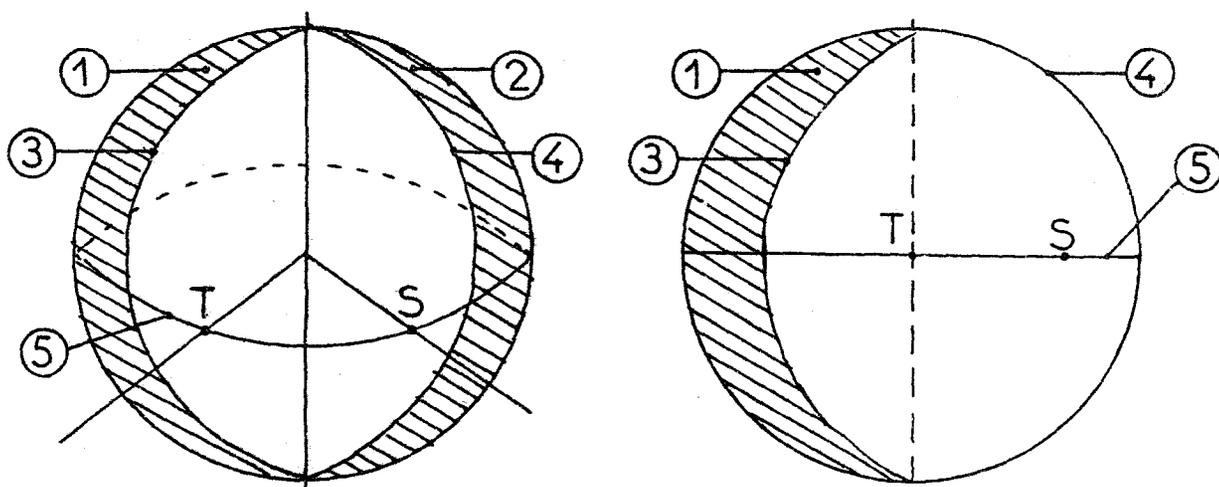
Ainsi posé, le problème est insoluble avec les moyens numériques dont nous disposons mais les tests des chapitres précédents permettent quelques simplifications. Puisque la lumière polarisée se forme dans la zone superficielle de la couche, pour une épaisseur optique critique de l'ordre de $\tau_c = 3$ (cf chap II § IV), on calculera les paramètres Q et U pour une couche τ_c petite, le paramètre V sera négligé (cf chap IV § V). La luminance totale I sera calculée indépendamment pour la couche complète suivant la méthode des harmoniques sphériques tout à fait performante si on néglige la polarisation. On constate par ailleurs que les éléments de la matrice de phase sont peu modifiés si on limite les développements à un ordre $2p' < 2p$. Les figures (V.1,2,3) montrent pour quelques valeurs $2p'$ et une granulométrie à $\lambda = 0.527 \mu\text{m}$ qu'on aura une approximation satisfaisante avec 48 points de Gauss.

II - Géométrie du problème

Le paramètre géométrique essentiel est l'angle de phase V entre les directions Soleil-Vénus et Vénus-Terre, qui varie de 0° (conjonction supérieure pour laquelle on voit tout le disque éclairé) à 180° (conjonction inférieure pour laquelle le disque est noir).

Les résultats seront portés sur le disque apparent de la planète (projection sur un plan perpendiculaire à l'axe d'observation Vénus-Terre). Suivant les valeurs de V seule sera éclairée une partie de ce disque. Le schéma (V.1) montre la géométrie du problème.

SCHEMA V. 1



- | | | |
|---|---------------------------------|------------------------|
| 1 | Zone non éclairée par le soleil | T : point subterrestre |
| 2 | Zone non vue depuis la terre | S : point subsolaire |
| 3 | Terminateur | |
| 4 | Limbe | |
| 5 | Equateur | |

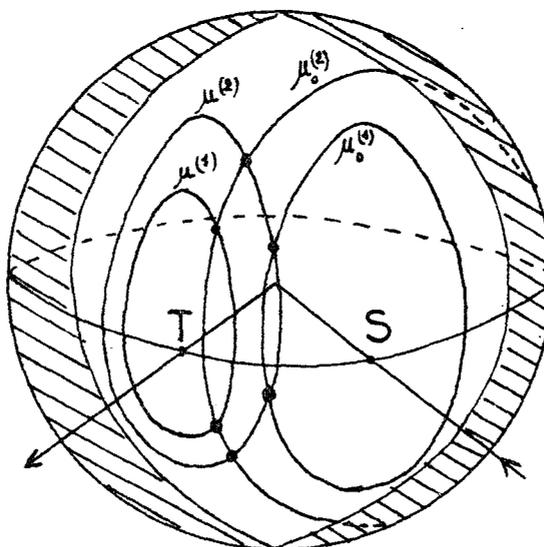
Le calcul correspondant à une géométrie plane, on suppose qu'en un point P, où le rayonnement émergent est calculé, on peut remplacer la couche sphérique par une couche plan-parallèle, perpendiculaire au rayon de la planète passant par P.

Remarque

Cette approximation n'est justifiée que dans la mesure où le rayonnement qui tombe en un point P' ressort de la couche, après diffusion, en P proche de P' c'est à dire si le libre parcours moyen de diffusion est petit devant le rayon de la planète. Nous supposons cette hypothèse réalisée. C'est au voisinage du limbe et du terminateur qu'elle est à priori la plus sujette à caution.

III - Répartition sur le disque

Dans la méthode des ordres successifs les angles μ sont imposés (points de Gauss). L'incidence μ_0 est par contre arbitraire, mais chaque valeur de μ_0 nécessite un calcul indépendant. Pour V , angle de phase donné, les points à μ_0 constant décrivent un cercle centré sur le point subsolaire, ceux à μ constant un cercle centré sur le point subterrestre. Les intersections de ces cercles, situées dans la partie observable depuis la terre, donnent les points où la luminance sera calculée (schéma V.2)



SCHEMA V. 2

Une même valeur de μ_0 sera utilisable pour tous les angles de phase puisque nous calculons les quantités $I^S(\mu_0, \mu)$, de même $Q^S(\mu_0, \mu)$ et $U^S(\mu_0, \mu)$, dans

$$I(\mu_0, \mu, V_1) = \sum_{s=0}^{\infty} (2-\theta_{0s}) I^S(\mu_0, \mu) \cos s\phi_1$$

ou
$$I(\mu_0, \mu, V_2) = \sum_{s=0}^{\infty} (2-\theta_{0s}) I^S(\mu_0, \mu) \cos s\phi_2$$

si bien que suivant les valeurs de V , un même couple (μ_0, μ) ne nécessitera que de recalculer $\cos \phi$. On évalue facilement que :

$$\cos \phi = \frac{\cos \theta \cos \theta_0 - \cos V}{\sin \theta \sin \theta_0}$$

où $\mu = \cos \theta$ et $\mu_0 = \cos \theta_0$

On voit donc que l'étude du paramètre V ne nécessitera aucun nouveau calcul important.

Pour un choix d'angles μ_0 et un ordre $2p$ donnés (donc la série des angles μ fixée), le nombre de points que l'on obtient est surtout fonction de l'angle de phase. Pour limiter les calculs en conservant une densité de points correcte, nous avons empiriquement choisi $\mu_0 = 0,95; 0,9; 0,8; 0,7; 0,5; 0,3$. Dans ces conditions les résultats couvrent correctement le disque apparent de Vénus, sauf pour les petites ou grandes valeurs de V ce qui n'est pas très gênant; de tels angles de phase correspondent en effet à de mauvaises conditions expérimentales (Soleil à coté de Vénus) pour lesquelles on ne dispose que de peu d'informations.

IV - Organisation du calcul

Une fois choisis les angles μ_0 pour une couche plan-parallèle, il suffit de porter sur la planète les points qui conviennent. Pour une valeur de V , un couple (μ_0, μ) correspondra à un point visible sur le disque si μ_0 et μ respectent certaines conditions que nous avons résumées ci-dessous.

$$V > 90^\circ \quad 0 < \mu_0 < \sin V \quad \text{et} \quad 0 < \mu < \cos(V - \theta_0)$$

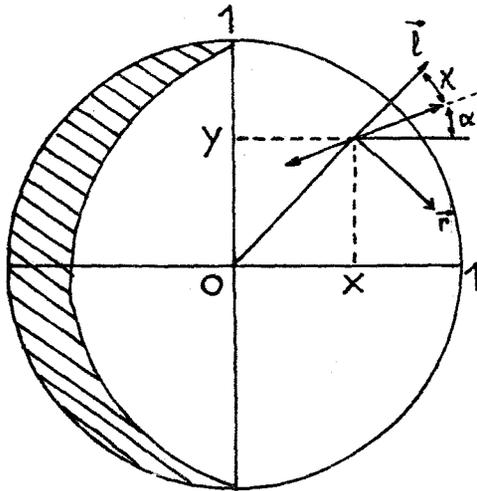
$$V < 90^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 < \frac{\pi}{2} - V \quad \text{et} \quad \cos(V + \theta_0) < \mu < \cos(V - \theta_0) \\ \text{ou} \\ \theta_0 > \frac{\pi}{2} - V \quad \text{et} \quad 0 < \mu < \cos(V - \theta_0) \end{array} \right.$$

Ces conditions permettent de ne retenir que les points sur lesquels

on fera la sommation de la série de Fourier avec ϕ donné par la relation

$$\cos \phi = \frac{\cos \theta \cos \theta_0 - \cos V}{\sin \theta_0 \sin \theta}$$

Une fois déterminés ces points (μ_0, μ, V) sur la planète, on passera aux variables (x, y) qui fixeront la position sur le disque apparent. On aura simplement :



$$x = \frac{\mu_0 - \mu \cos V}{\sin V}$$

$$y = \sqrt{1 - \frac{\mu_0^2 + \mu^2 - 2 \mu \mu_0 \cos V}{\sin^2 V}}$$

On repérera également la direction du plan de polarisation par son angle α avec la direction ox

$$\alpha = \text{Arctg} \frac{x}{y} - \chi$$

$$\text{avec } \chi = \frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{U}{Q}$$

On a schématisé le calcul dans l'organigramme N° 2 .

V-Variation avec l'albédo

L'albédo de diffusion est également un paramètre facilement variable dans nos calculs. Ceux-ci sont faits pour un milieu conservatif ($\omega_0 = 1$); les résultats pour une valeur quelconque de ω_0 s'écriront simplement :

$$Q^S (\tau=0; \mu_0, \mu, \omega_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_0^n Q_n^S (\tau=0; \mu_0, \mu, \omega_0 = 1) \text{ (cf ch IV § IV)}$$

Le seul problème sera le stockage des quantités $Q^S (\tau=0; \mu_0, \mu, \omega_0)$ dont le nombre devient très important si on prend de nombreux ω_0 . La relation précédente n'est rigoureuse que pour un milieu infini mais est valable ici pour la polarisation puisque le fond de la couche n'intervient pas.

VI - Diffusion Rayleigh

La contribution de la diffusion Rayleigh par l'atmosphère moléculaire

de Vénus peut devenir essentielle lorsque la longueur d'onde du rayonnement diminue (loi en λ^{-4}). Ce paramètre peut être étudié ici sans gros calculs supplémentaires, si nous supposons le mélange particules-molécules homogène. Les éléments de la matrice de $P_R(\theta)$ de la diffusion moléculaire se développent exactement en trois termes (cf tableau (V.1))

Tableau (V.1)

l	α	β	γ	ϑ	ϵ	ξ
0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	3/2	0	0
2	3	1/2	$-\sqrt{3/2}$	0	0	0

Soit $P_p(\theta)$ la matrice de phase des particules définie par les coefficients $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l, \vartheta_l, \epsilon_l$ et ξ_l . La matrice de phase $P(\theta)$ résultant d'un mélange homogène sera définie à partir du taux de diffusion Rayleigh ϑ par

$$P(\theta) = (1 - \vartheta) P_p(\theta) + \vartheta P_R(\theta),$$

ce qui donne $P(\theta)$ normalisé avec $\beta_0 = 1$

(ϑ est relié aux coefficients de diffusion par $\frac{1-\vartheta}{\vartheta} = \frac{k_p}{k_R}$)

Puisque les éléments de $P_R(\theta)$ se développent en trois termes nous pouvons distinguer deux cas suivant que " l " est supérieur ou inférieur à 2; nous donnons les coefficients (notés avec astérisque) de $P(\theta)$ dans le tableau (V.2) obtenus à partir de la définition de $P(\theta)$ et du tableau (V.1).

Tableau (V.2)

l	α^*	β^*	γ^*	ϑ^*	ϵ^*	ξ^*
0	0	1	0	$(1-\vartheta) \vartheta$	0	0
1	0	$(1-\vartheta) \beta_1$	0	$(1-\vartheta) \vartheta_1 + \frac{3\vartheta}{2}$	0	0
2	$(1-\vartheta) \alpha_2 + 3\vartheta$	$(1-\vartheta) \beta_2 + \frac{\vartheta}{2}$	$(1-\vartheta) \gamma_2 - \vartheta \frac{\sqrt{3}}{2}$	$(1-\vartheta) \vartheta_2$	$(1-\vartheta) \epsilon_2$	$(1-\vartheta) \xi_2$
> 2	$(1-\vartheta) \alpha_l$	$(1-\vartheta) \beta_l$	$(1-\vartheta) \gamma_l$	$(1-\vartheta) \vartheta_l$	$(1-\vartheta) \epsilon_l$	$(1-\vartheta) \xi_l$

Lors de la décomposition en série de Fourier, les sommations sur les

fonctions de Legendre commencent à l'ordre $l \geq s$ et vont jusqu'à $l=2p$.
 Pour $s = 0, 1$ et 2 il faudra recommencer le calcul puisqu'il n'existe aucune relation de linéarité entre les coefficients α_l, \dots, ξ_l et les coefficients α_l, \dots, ξ_l pour $l = 0, 1$ et 2 . Mais pour $s > 3$ puisque

$$\alpha_l = (1 - \partial)\alpha_l, \dots, \xi_l = (1 - \partial)\xi_l$$

Les quantités Q^s et U^s se déduiront de Q^s et U^s , (obtenues avec $P_p(\theta)$) par

$$Q^s = (1 - \partial) Q^s \text{ et } U^s = (1 - \partial) U^s$$

D'autre part, le taux ∂ de Rayleigh, sera en général petit et n'influencera pas le calcul de la luminance totale et on aura finalement :

$$I(\tau=0; \mu_0, \mu, \phi, \partial \neq 0) = I(\tau=0; \mu_0, \mu, \phi, \partial = 0)$$

$$Q(\tau=0; \mu_0, \mu, \phi, \partial \neq 0) = \sum_{s=0}^{2p} (2 - \partial_{0s}) \cos s\phi Q^s(\tau=0, \mu_0, \mu, \partial = 0) \\ + (1 - \partial) \sum_{s=3}^{2p} (2 - \partial_{0s}) \cos s\phi Q^s(\tau=0, \mu_0, \mu, \partial = 0)$$

(et U du même type de Q avec une sommation en sinus).

Pour chaque nouvelle valeur de ∂ , seuls les termes $s = 0, 1$ et 2 seront à recalculer.

VII - Résultats (Taux de polarisation exprimés en millièmes)

Nous présentons quelques résultats obtenus pour la répartition théorique de la lumière polarisée sur le disque de Vénus. La couche diffusante est supposée homogène et d'épaisseur optique infinie. Les paramètres du milieu sont l'absorption propre, l'indice et la granulométrie des particules, et le taux δ de diffusion Rayleigh, dont on doit tenir compte en polarisation. Cette composante moléculaire sera supposée ici uniformément mélangée aux particules.

Compte tenu de la lourdeur des calculs, nous n'avons pu envisager qu'un seul type de particules diffusantes, et le choix de ce modèle est évidemment délicat. Des études antérieures, portant sur la polarisation intégrée sur le disque (Hansen...) ont montré un assez bon accord pour des particules ainsi définies :

. $n = 1,45 \pm 0,02$ pour l'indice
 . $n(r) = r^{p_2} \exp\left(-\frac{p_2}{p_1} r\right)$, avec $p_1 = 0,8 \mu\text{m}$ et $p_2 = 6$, pour la granulométrie. (Fig V.4)

On définit plus généralement la granulométrie par le rayon moyen $\langle r \rangle$ et la variance v :

$$\langle r \rangle = \frac{\int_0^{\infty} r^2 n(r) dr}{\int_0^{\infty} r n(r) dr} = \frac{p_1(p_2+3)}{p_2};$$

$$v = \frac{\int_0^{\infty} (r - \langle r \rangle)^2 n(r) dr}{\int_0^{\infty} n(r) dr} = \frac{1}{p_2+3}$$

Les résultats expérimentaux donnent $\langle r \rangle = 1,1 \pm 0,1$ microns et $v = 0,11$.

$\delta = 0,01$ pour le taux de diffusion moléculaire à $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$.

Un résultat assez voisin peut être obtenu plus simplement, en faisant l'hypothèse que les angles de phase donnant une polarisation nulle correspondent sensiblement aux zéros de polarisation de la fonction de diffusion primaire. On dispose [19] de résultats donnant ces zéros de polarisation en fonction de λ et de V . L'analyse se fait en diffusion primaire assez facilement. Il suffit d'ajuster l'indice et δ pour avoir à chaque longueur d'onde :

$$\sum_{l=2}^{2p} \chi_l P_2^l (\cos(\pi - V)) = 0$$

Les coefficients χ_l , relatifs au mélange homogène des particules et du gaz, ayant été définis dans le tableau (V.2). L'accord avec les mesures est obtenu pour $n = 1,46$ et $\vartheta = 3\%$ à $\lambda = 0,4 \mu\text{m}$ (soit $\vartheta = 1\%$ à $0,5 \mu\text{m}$).

Nous avons finalement retenu pour nos calculs $n = 1,46$, $\langle r \rangle = 1,2 \mu\text{m}$ et $v = 0,111$, l'albédo ω_0 se définissant alors à partir de l'albédo sphérique A et du coefficient β_1 .

Remarque

Les valeurs p_1 et p_2 étant fixées, $P(\theta)$ dépend bien entendu de λ . Nos calculs ont été faits à $\lambda = 0,527 \mu\text{m}$. On vérifie que $P(\theta)$ se développe avec les mêmes coefficients α_l, \dots, ξ_l à une autre longueur d'onde λ' , si on a une granulométrie différente définie par :

$$p_1' = \frac{\lambda'}{\lambda} p_1 \quad \text{et} \quad p_2' = \frac{\lambda'}{\lambda} p_2$$

On voit donc que l'on pourra étudier d'autres longueurs d'onde en changeant parallèlement de granulométrie.

1) Variation avec l'angle de phase

Les figures (V.5) à (V.12) donnent l'allure des lignes d'isopolarisation et du plan de polarisation en fonction de l'angle de phase V . La diffusion Rayleigh est négligée et nous avons pris un albédo $\omega_0 = 0,9995$ qui respecte l'albédo sphérique de la planète à $0,527 \mu\text{m}$. Sauf pour $V = 25^\circ$, les lignes d'isopolarisation sont régulières. Le minimum de polarisation est situé au centre de la zone observable tandis que les maxima sont aux pôles. Cette variation est assez normale, le taux de polarisation décroissant, comme on l'a vu, avec les grands ordres de diffusion.

La direction du plan de polarisation, sauf pour $V = 25^\circ$, est sensiblement constante, perpendiculaire ou parallèle à l'équateur. Cette direction est obtenue à partir de celle de la diffusion primaire; il suffit pour cela de connaître le signe de la fonction $\Gamma(\theta) = \sum_{l=2}^{2p} \gamma_l P_2^l(\cos \theta)$ représentée figure (V.1) : pour un angle V tel que $\Gamma(\pi - V)$ soit positif, le plan de polarisation sera parallèle à l'équateur, et perpendiculaire dans les autres cas.

L'angle de phase $V = 25^\circ$ (c'est à dire $\theta = 155^\circ$) correspond à un zéro de diffusion primaire, ce qui explique l'aspect très particulier des lignes d'isopolarisation et de la direction de polarisation pour cet angle.

Pour les angles $V = 150^\circ$ et 155° , qui entouraient un autre zéro de polarisation ($\theta = 27^\circ$), on retrouve le même phénomène sur le plan de polarisation. (L'étude de la répartition n'ayant pas été faite pour ces angles qui correspondent à un croissant visible très étroit). Il est clair, à priori, que c'est au voisinage de ces points singuliers que des observations fines seraient les plus riches en informations.

2) Influence de l'albédo

L'albédo sphérique A , dont on déduit l'albédo simple ω_0 , est en fait assez mal déterminé; nous avons donc comparé, à quelques angles de phase (fig. (V.13,14,15)) les résultats obtenus pour deux valeurs de cet albédo : $\omega_0 = 0,9995$ ($A = 0,905$) et $\omega_0 = 0,9999$ ($A = 0,956$). Le plan de polarisation ne bouge pas; la variation du taux de polarisation est très faible, ce taux diminuant un peu quand l'albédo augmente (variation toujours liée à la disparition des ordres élevés de diffusion, moins polarisés quand l'absorption du milieu augmente)

3) Influence de la diffusion Rayleigh

La diffusion moléculaire, introduite de façon homogène dans le nuage de particules, a une influence beaucoup plus importante que l'albédo, comme le montrent les figures (V.16,17,18).

Les fonctions $\sum_{l=2}^{2p} \gamma_l P_2^l(\mu)$ relatives à la diffusion Rayleigh fig (II.1) - et à la diffusion par les particules - fig (V.1) - sont de signes contraires pour les angles où la diffusion moléculaire est importante ($45^\circ < \theta < 135^\circ$). Pour ces angles de phase, on observe bien une baisse du taux de polarisation, la direction du plan de polarisation étant peu modifiée. Pour $V = 25^\circ$ on reste près d'un zéro de polarisation; les taux restent faibles, avec ou sans Rayleigh, mais la composante Rayleigh perturbe fortement les directions du plan de polarisation (fig V.19); une telle zone d'observation est certainement très favorable pour l'étude précise de la contribution moléculaire.

4) Comparaison aux mesures

Nous présentons une comparaison très succincte entre nos résultats théoriques et des données expérimentales obtenues dans l'orange. Les observations {20} ont été faites à l'Observatoire de Meudon par A. Dollfus qui a bien voulu nous les communiquer (résultats non publiés). Ces mesures

étalées sur une dizaine de jours (Mars 1972), couvrent des angles de phase compris entre $72^{\circ}5$ et $77^{\circ}5$. La figure (V.20) montre que les taux de polarisation, exprimés en millièmes, fluctuent dans le temps et que les valeurs ne sont pas symétriques par rapport à l'équateur (ce qui invalide évidemment notre modèle homogène).

Les valeurs expérimentales moyennes sont présentées sur la figure (V.21) où on a superposé les lignes d'isopolarisation pour $\omega_0 = 0,9999$ et $\delta = 0$; les résultats théoriques sont en assez bon accord avec les mesures bien que le rayon moyen théorique soit $1,3 \mu\text{m}$ compte tenu de la longueur d'onde expérimentalement retenue. Il est clair qu'il ne s'agit que d'une vérification très grossière, montrant la cohérence des résultats et qu'une étude plus fine sera nécessaire. Les observations expérimentales {20} montrent parfois une décroissance très nette du taux de polarisation vers les pôles ce que nous ne retrouvons en aucun cas théoriquement, malgré la diffusion Rayleigh. Ceci est certainement lié à la façon dont on a réparti le gaz et les particules; il est probable qu'il faudrait introduire deux couches différentes, la couche gazeuse surmontant le nuage de particules. Cette disposition favoriserait sans doute la baisse du taux de polarisation aux pôles où l'incidence et l'émergence étant relativement rasantes, la couche superficielle de gaz interviendrait alors totalement pour la polarisation ce qui n'est pas le cas pour un mélange homogène.

5) Polarisation intégrée

On déduit facilement le taux de polarisation intégré sur le disque des résultats ponctuels précédents. Connaissant en chaque point, les paramètres de Stokes I, Q et U et l'angle α de la direction de polarisation avec l'équateur, on définira le taux intégré Δ par

$$\Delta = \frac{\int \sqrt{Q^2 + U^2} (\sin \alpha - \cos \alpha) dS}{\int I dS}$$

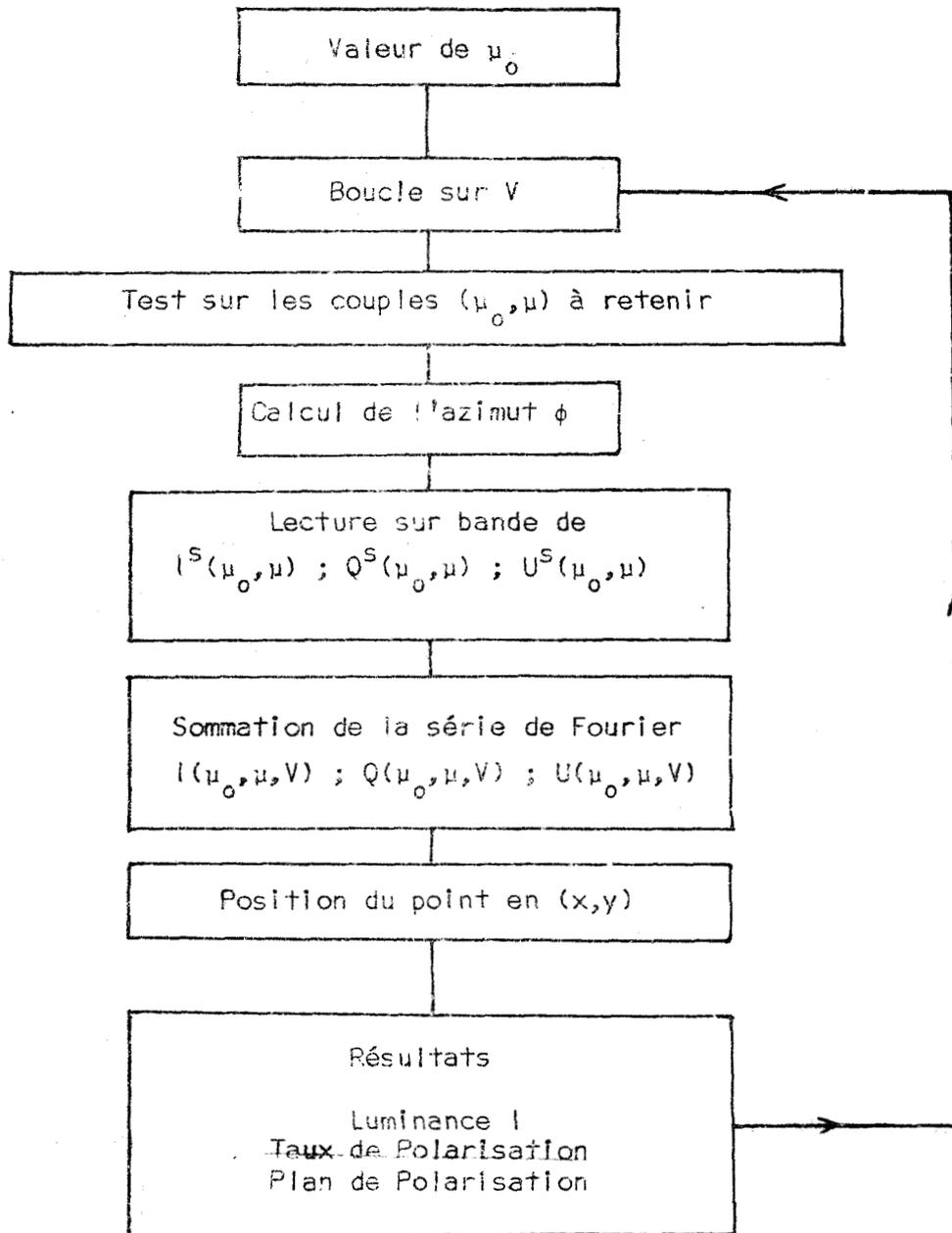
les intégrales portant sur la partie éclairée du disque.

La figure (V.22) représente la variation de Δ en fonction de l'angle de phase, pour $\omega_0 = 0,9999$ et $\omega_0 = 0,9995$, avec et sans diffusion Rayleigh. Ces résultats théoriques sont comparés à diverses observations ($\lambda = 0,53 \mu\text{m}$), l'accord étant satisfaisant compte tenu de la dispersion des mesures {19}. On retrouve à nouveau le peu d'influence de l'albédo par rapport à l'influence de la diffusion Rayleigh. La comparaison de ces courbes avec le diagramme de diffusion primaire (fig V.1) montre que, même après intégration, la position des zéros de polarisation est conservée. Ce résultat justifie la méthode

utilisée au départ pour obtenir le taux de diffusion moléculaire et un modèle probable des particules à partir de la position des zéros de polarisation.

VIII - Conclusion

On voit donc que la méthode des ordres successifs permet une étude intéressante de la polarisation localisée de Vénus. Les résultats présentés sont évidemment trop succincts, aucune étude systématique n'ayant été entreprise, en dehors des influences de l'albédo et du taux de diffusion moléculaire. Ceci est dû essentiellement à la longueur des temps de calcul : à titre indicatif il faut environ 7 heures d'ordinateur (C I I 10070) pour traiter une granulométrie.



CONCLUSION

La méthode d'approximations successives, développée à partir des harmoniques sphériques, donne de bons résultats en incidence normale et permet de traiter la polarisation sans nouvelles difficultés majeures. La généralisation au cas d'une incidence oblique semble possible. Même si ses possibilités numériques étaient plus restreintes dans ce cas, sa mise au point serait intéressante compte tenu de la rapidité de ce type de méthode. Les limites de la méthode des harmoniques sphériques sont pratiquement liées à la précision avec laquelle on peut extraire les racines des polynômes caractéristiques; actuellement le degré maximum que l'on peut atteindre est $2p \approx 30$ ce qui limite le type des milieux diffusants étudiés. Nous avons montré par ailleurs que l'on pouvait traiter le rayonnement polarisé presque indépendamment du rayonnement global, ce qui devrait simplifier certaines analyses, et que la polarisation se formait dans une couche superficielle d'épaisseur optique de l'ordre de 2 à 4, ce résultat dépendant peu de la nature du milieu diffusant.

La méthode des ordres successifs de diffusion a un domaine d'utilisation beaucoup plus étendu, mais conduit malheureusement à des temps de calcul prohibitifs, même en se plaçant dans les conditions les moins défavorables que nous avons dégagées dans notre étude (choix de la discrétisation de la couche, convergence en série géométrique, saturation des paramètres de polarisation avec l'épaisseur optique totale...). Une première étude succincte de la polarisation localisée de Vénus a pourtant été possible en se limitant aux variations de l'angle de phase, de l'albédo et du taux de diffusion Rayleigh.

Sauf près d'un zéro de polarisation en diffusion primaire, l'albédo du milieu perturbe peu les lignes d'isopolarisation et la direction du plan de polarisation; il constitue donc un paramètre secondaire du problème.

Le taux de diffusion moléculaire diminue par contre la polarisation sur le disque. Là aussi, c'est au voisinage d'un zéro de polarisation que les résultats sont les plus modifiés. De façon générale c'est à priori pour de tels angles de phase que l'on pourrait extraire le plus de renseignements sur le milieu. Ce problème de la diffusion Rayleigh demande d'ailleurs à être complété par une étude sur un modèle à deux couches; il serait en effet très intéressant de déterminer comment sont réparties en altitude les molécules et les particules et d'étudier cette répartition sur le disque observable afin de tester les inhomogénéités.

Enfin une extension évidente des applications consisterait à tester, particulièrement au voisinage des zéros de polarisation, les modifications du taux de polarisation et de la direction de polarisation correspondant à des variations de l'indice et du rayon moyen des particules, pour voir si la polarisation localisée permet une analyse plus sensible que la polarisation intégrée; une étude systématique serait à entreprendre en fonction de la longueur d'onde, particulièrement en ultraviolet où l'influence de la diffusion moléculaire est essentielle.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - S. CHANDRASEKHAR - Radiative Transfert, Oxford University Press
- 2 - I. KUSCER, M. RIBARIC - Matrix formalism in the theory of diffusion of light. - Optica Acta, vol 6, n° 1, pp 42-51 (1959)
- 3 - I.M. GEL'FAND, Z.Y. SHAPIRO - Amer. Math. Soc. Translations, 2, 207 (1956)
- 4 - M. HERMAN - Contribution à l'étude du transfert radiatif dans un milieu diffusant et absorbant. - Thèse, Université de Lille (1968)
- 5 - J.L. DEUZE, C. DEVAUX, M. HERMAN - Adaptation de la méthode des Harmoniques Sphériques aux calculs de la lumière diffuse polarisée. Remarques sur la formation du rayonnement rediffusé par une atmosphère optiquement dense. - à paraître, Nouvelle Revue d'Optique
- 6 - B. DAVISON - Neutron Transport Theory, Clarendon, Oxford (1958)
- 7 - J. LENOBLE - Importance de la polarisation dans le rayonnement diffusé par une atmosphère planétaire. - J.Q.S.R.T., vol 10, pp 533-556, (1970)
- 8 - J.L. DEUZE - Extension de la méthode des Harmoniques Sphériques au calcul de la luminance polarisée diffuse et au cas d'une couche d'absorption variable. - Rapport D.E.A. Lille (1971)
- 9 - J.C. GUILLEMOT - Contribution à l'étude du transfert de rayonnement dans les nuages par la méthode des Harmoniques Sphériques. - Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Lille (1966)
- 10 - J.E. HANSEN et A. ARKING - Clouds of Venus : Evidence for their nature.- Science, vol 171, pp 669-672, (1971)
- 11 - J.L. DEUZE, C. DEVAUX, M. HERMAN - Utilisation de la méthode des Harmoniques Sphériques dans les calculs de transfert radiatif. Extension au cas de couches diffusantes d'absorption variable. - Nouvelle Revue d'Optique, t 4, n° 5, pp 307-314, (1973)
- 12 - P. POUZET - Publications du Laboratoire de Calcul de la Faculté des Sciences de Lille
- 13 - N. GASTINEL - Analyse numérique linéaire - Enseignement des Sciences (Hermann) (1966)
- 14 - C. DEVAUX - Thèse en préparation
- 15 - C. DEVAUX, Y. FOUQUART, M. HERMAN, J. LENOBLE - Comparaison de diverses méthodes de résolution de l'équation de transfert du rayonnement dans un milieu diffusant. - J.Q.S.R.T., vol 13, pp 1421-1431, (1973)

- 16 - V.S. ADVUEVSKI, M. Ya. MAROV, M.K. ROZHDESTVENSKY, N.F. BORODIN, V.V. KERZHANOVICH - Soft landing of Venera 7 on the Venus Surface and Preliminary Results of Investigations of the Venus Atmosphere. - J.A.S., vol 28, pp 263-269, (1971)
- 17 - W.M. IRVINE - Monochromatic Phase Curves and Albedos for Venus. - J.A.S., vol 25, pp 610-628, (1968)
- 18 - C. BIGOURD, J.L. DEUZE, C. DEVAUX, M. HERMAN, J. LENOBLE - Theoretical Study of Intensity Distribution on the Apparent Venus Disk. - Copernicus Symposium on the Exploration of the Planetary System, Torun (Pologne), 5-8 Sept. 1973
- 19 - A. DOLLFUS, D.L. COFFEEN - Polarization of Venus : Disk Observations. - Astron. Astroph., 8, pp 251-256, (1970)
- 20 - A. DOLLFUS - Communication Personnelle.

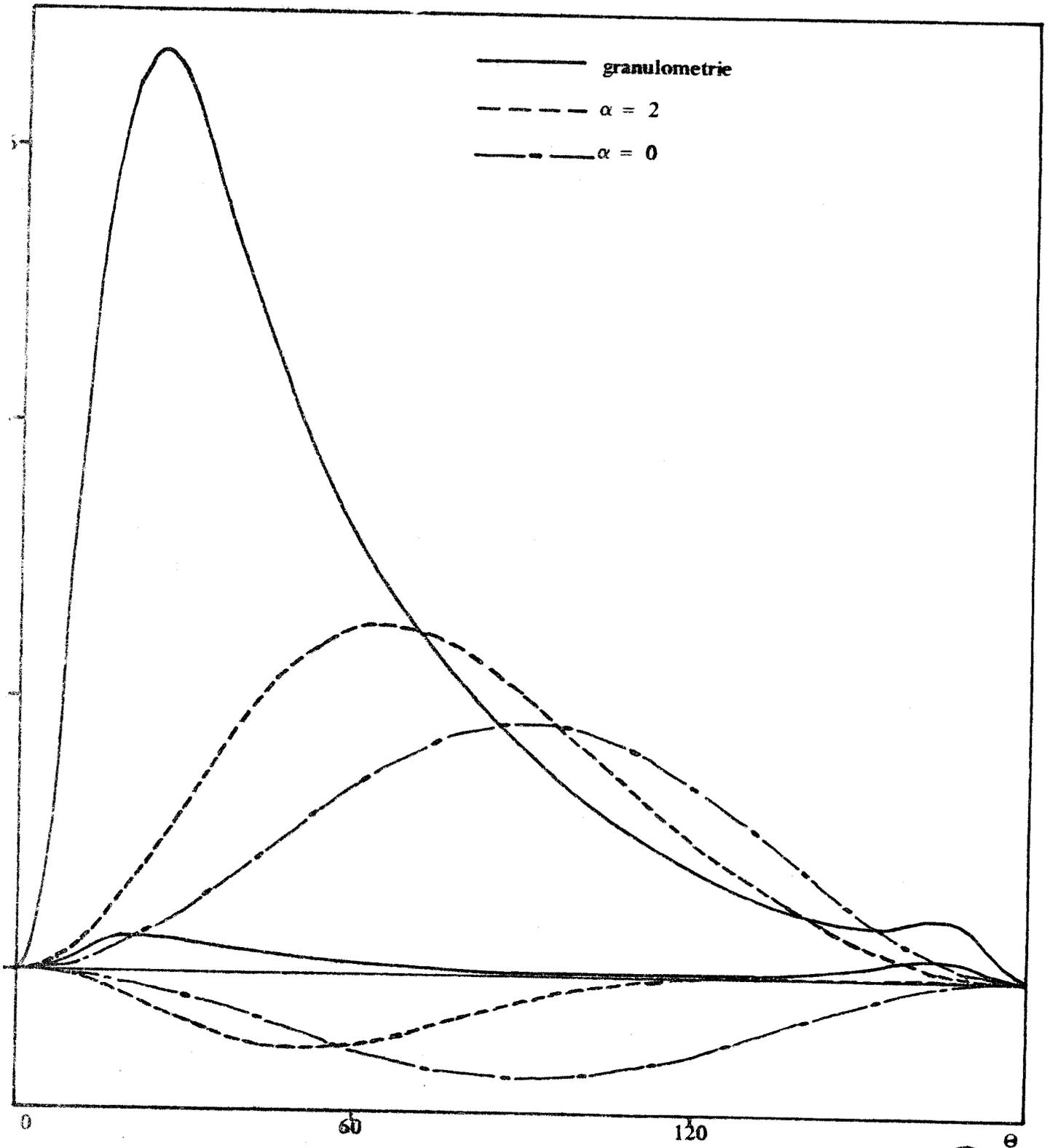


Figure II- 1

Les trois courbes supérieures représentent $\sum_{\ell=2}^{2p} \alpha_{\ell} P_{\ell}^{\ell}(\cos \theta)$.

Les courbes inférieures correspondent à $\sum_{\ell=2}^{2p} \gamma_{\ell} P_{\ell}^{\ell}(\cos \theta)$



$$\text{Log } \sum_{\ell=0}^{2p} \beta_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

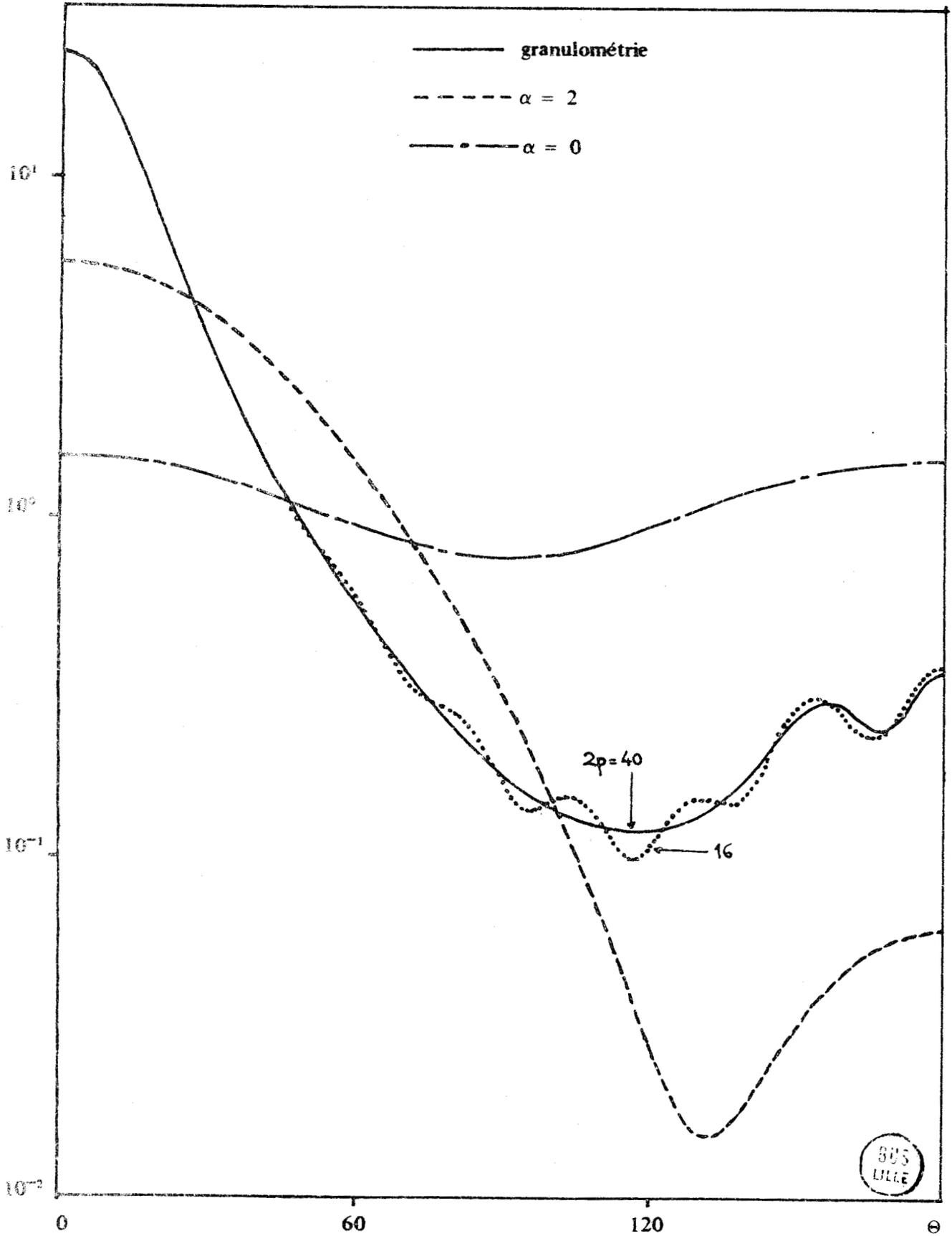


Figure II- 2

$$\sum_{l=2}^{2p'} \alpha_l P_l^l(\cos \theta)$$

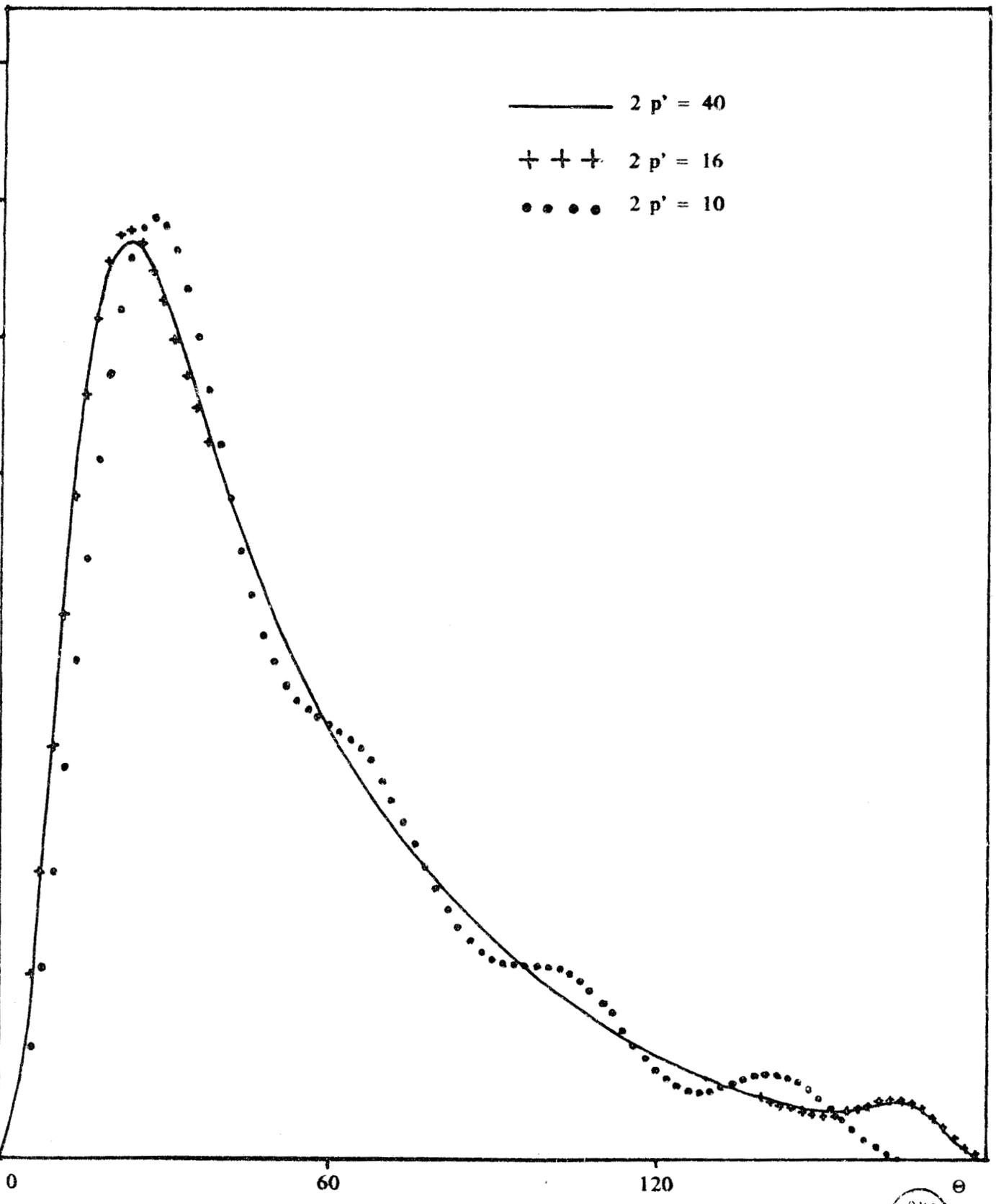


Figure II-3

Influence de la longueur du développement de la matrice de phase.
(Granulométrie de Vénus à 1,5 microns).



$$\sum_{\ell=2}^{2p'} \gamma_{\ell} P_{\ell}^{\ell}(\cos \Theta)$$

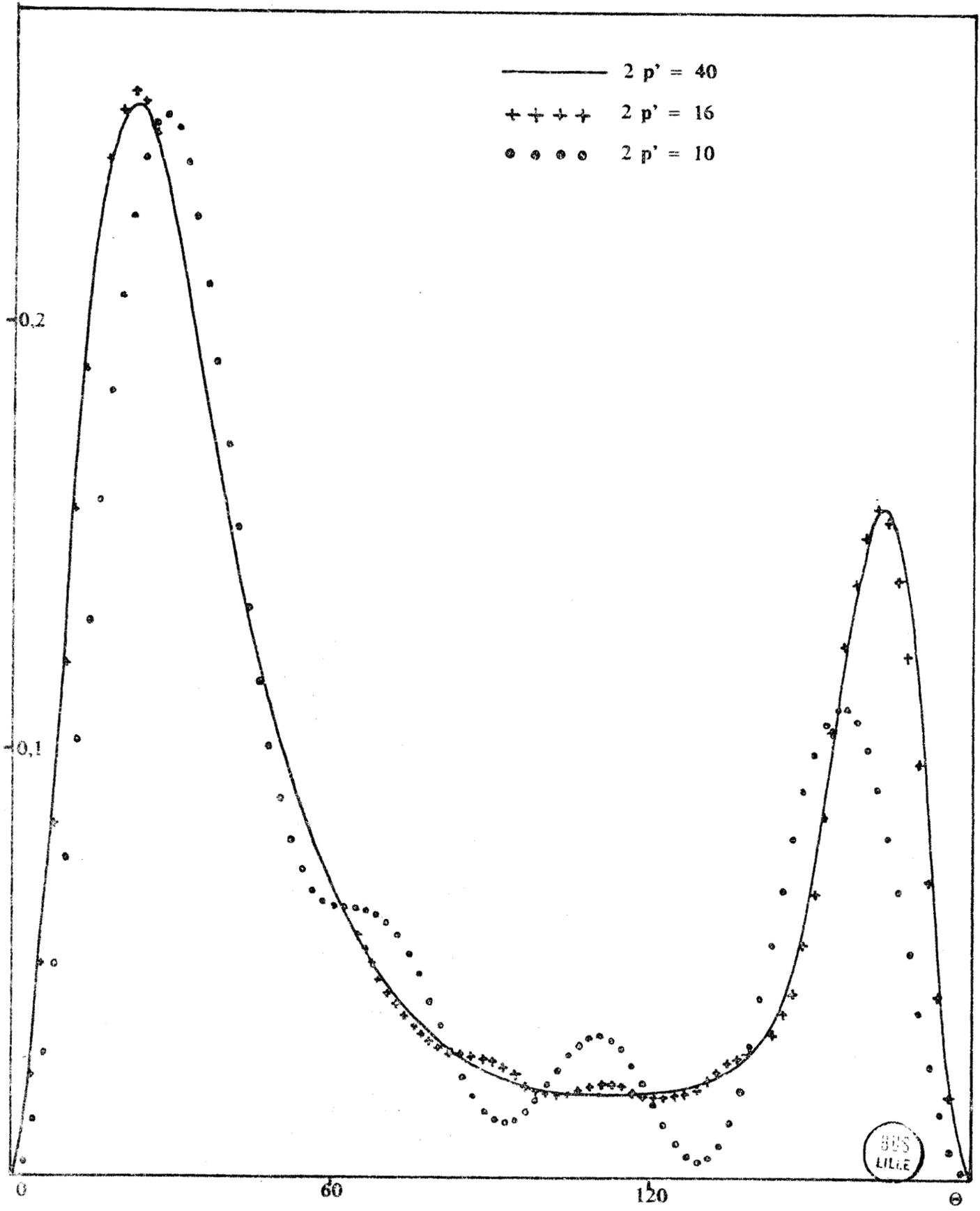


Figure II- 4
Influence de la longueur du développement de la matrice de phase.
(Granulométrie de Vénus à 1,5 microns)

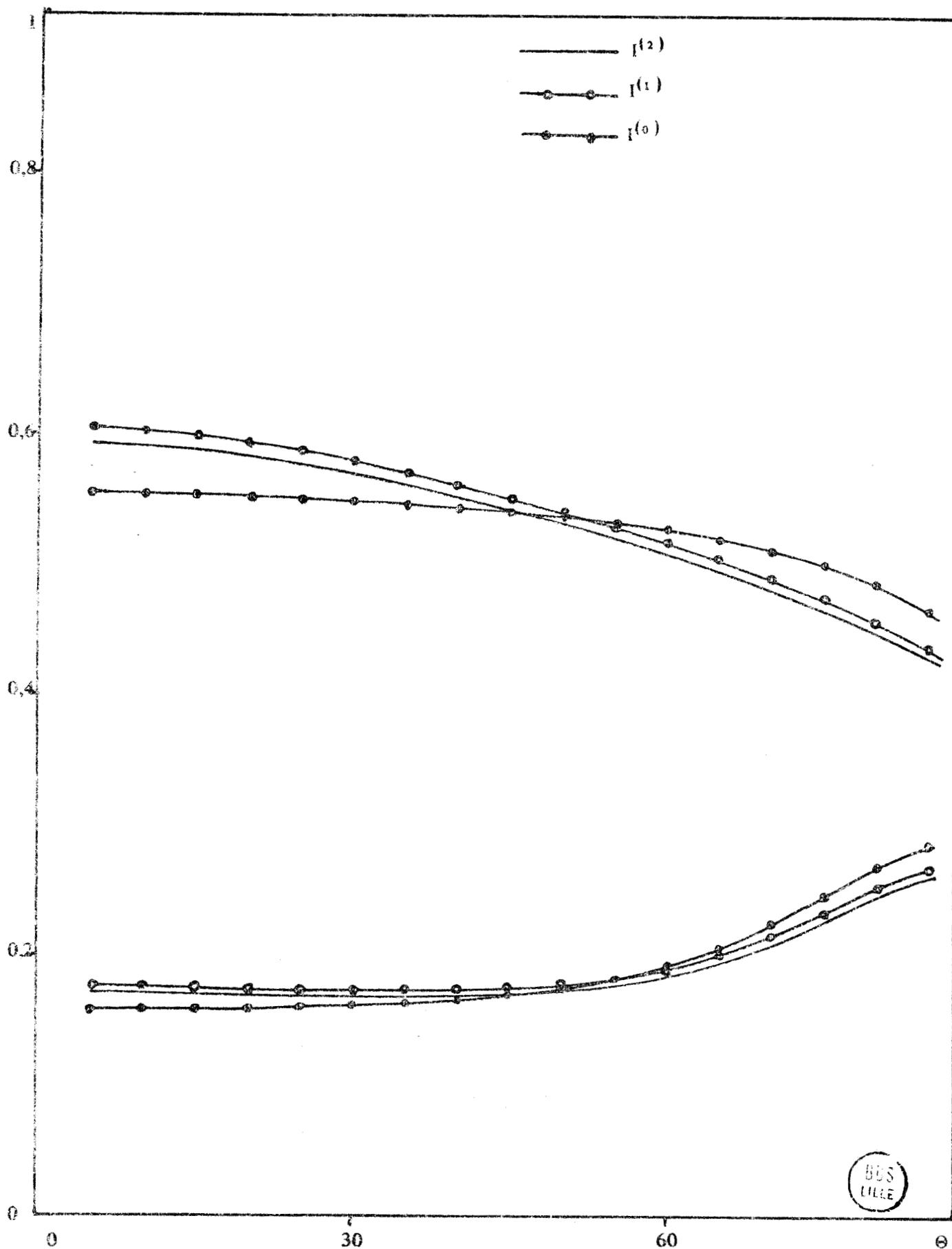


Figure II- 5

Luminance émergente ($\tau=0$) pour les trois approximations du calcul et deux épaisseurs optiques $\tau_1=0,5$ (en bas) et $\tau_1=8$ (en haut), avec des particules $\alpha \simeq 0$. (Incidence normale, $\omega_0=0,95$)

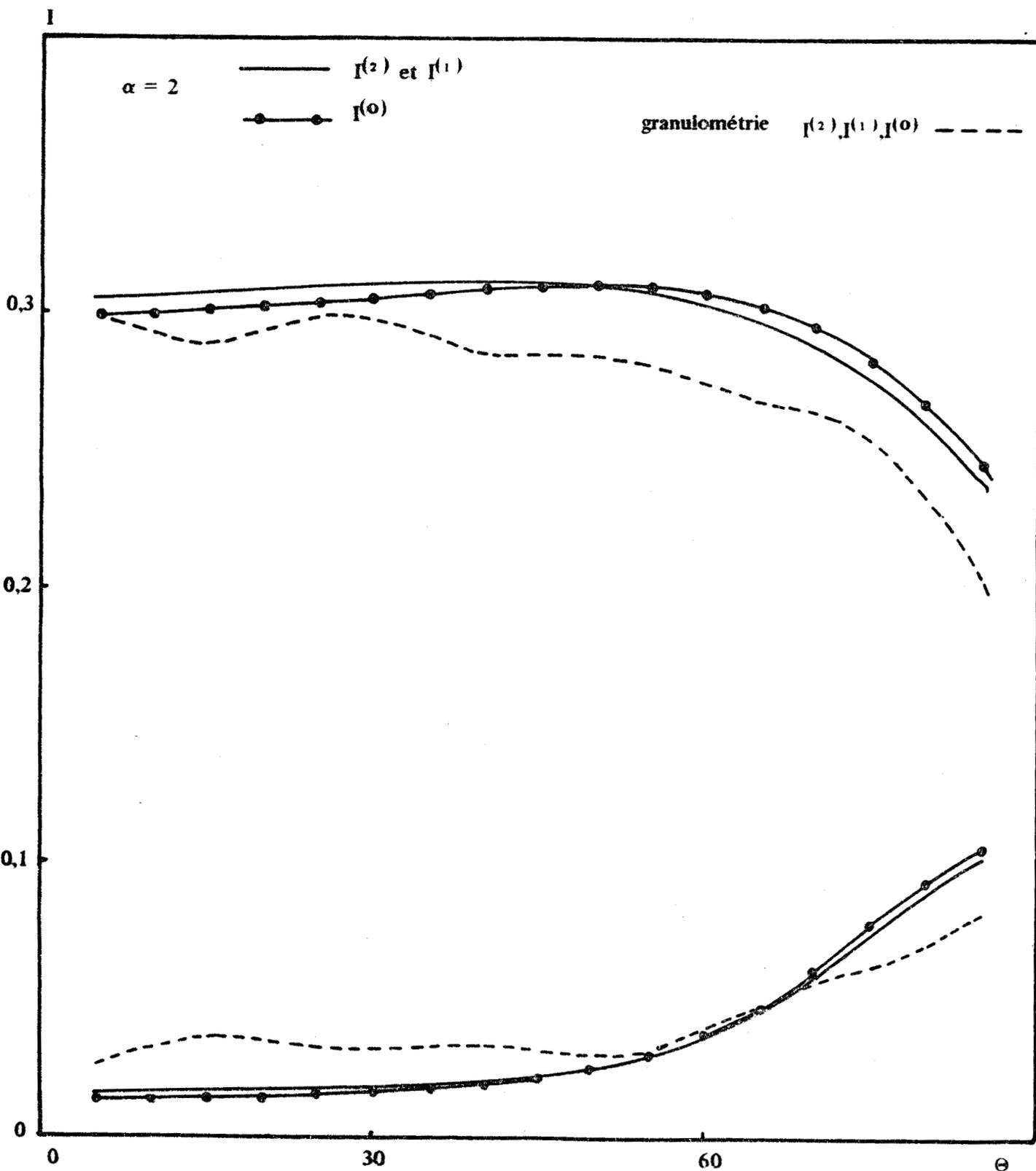


Figure II- 6

Même légende qu'en II- 5 avec des particules différentes.



Q

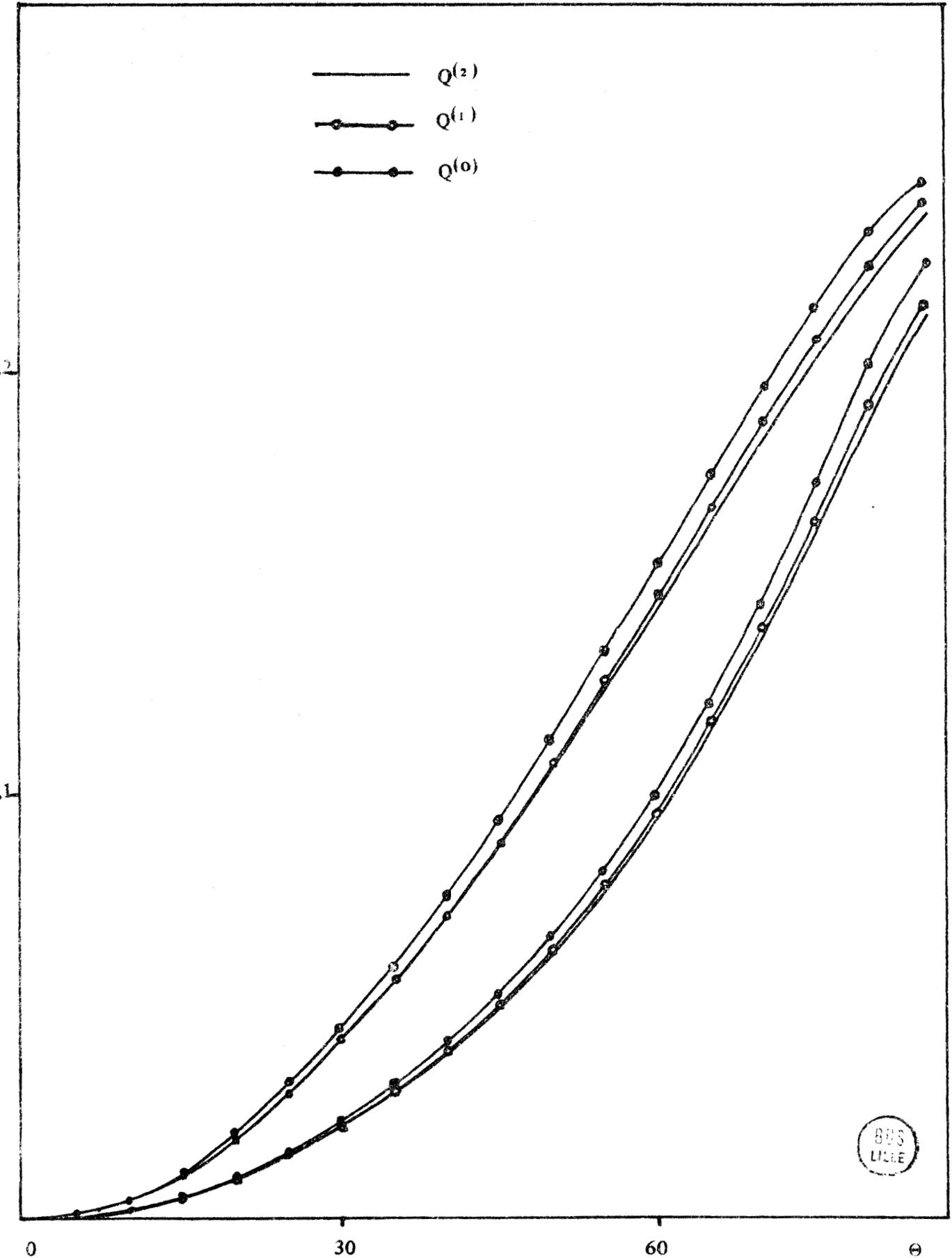


Figure II- 7

Luminance polarisée ($\tau=0$) pour les trois approximations du calcul et deux épaisseurs optiques $\tau_1 = 0,5$ (en bas) et $\tau_1=8$ en haut, avec des particules $\alpha \simeq 0$. (Incidence normale : $\omega_0 = 0,95$)

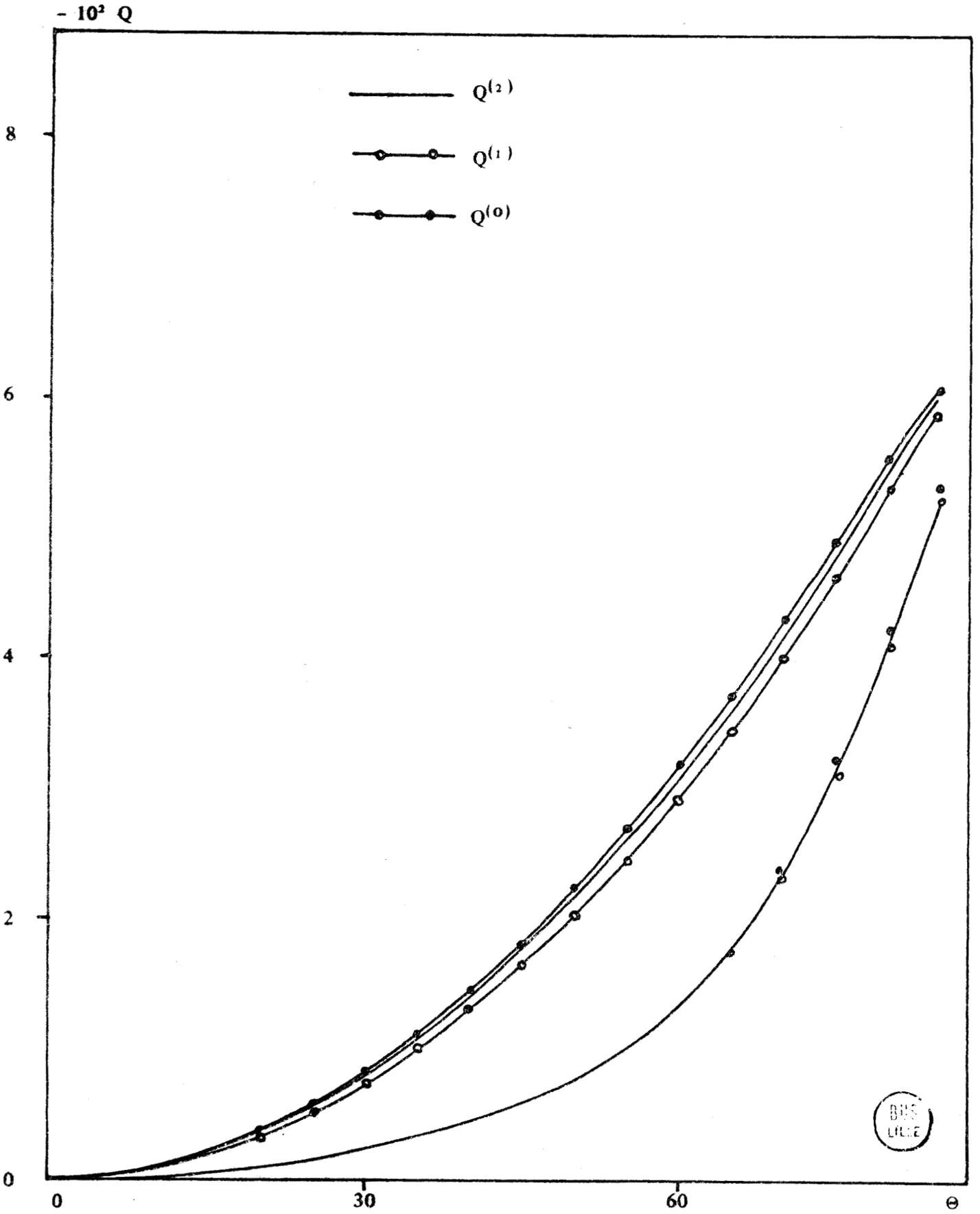


Figure II- 8

Même légende qu'en II- 7 pour des particules $\alpha = 2$

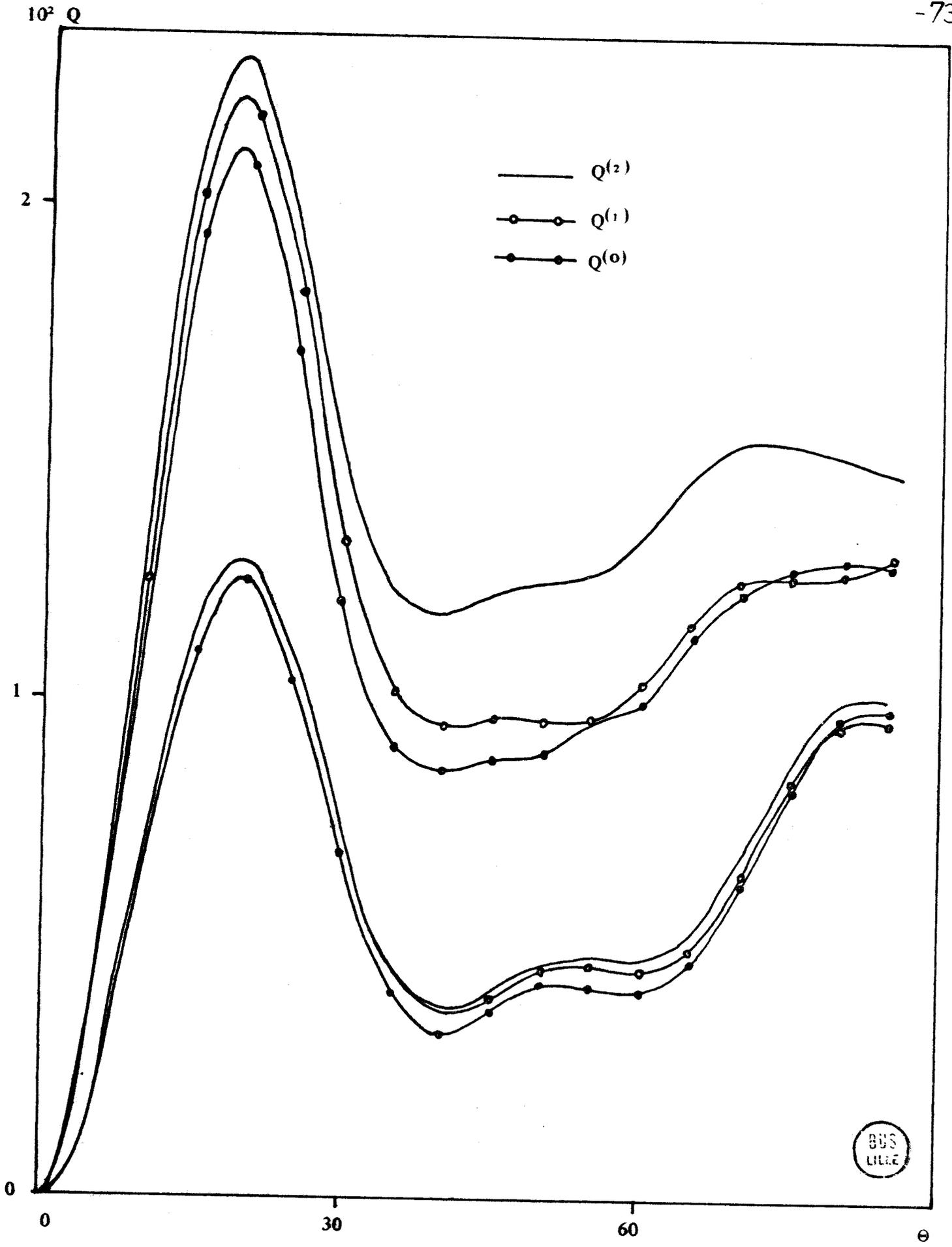


Figure II- 9

Même légende que II- 7 avec la granulométrie de Vénus à 1,5 microns .

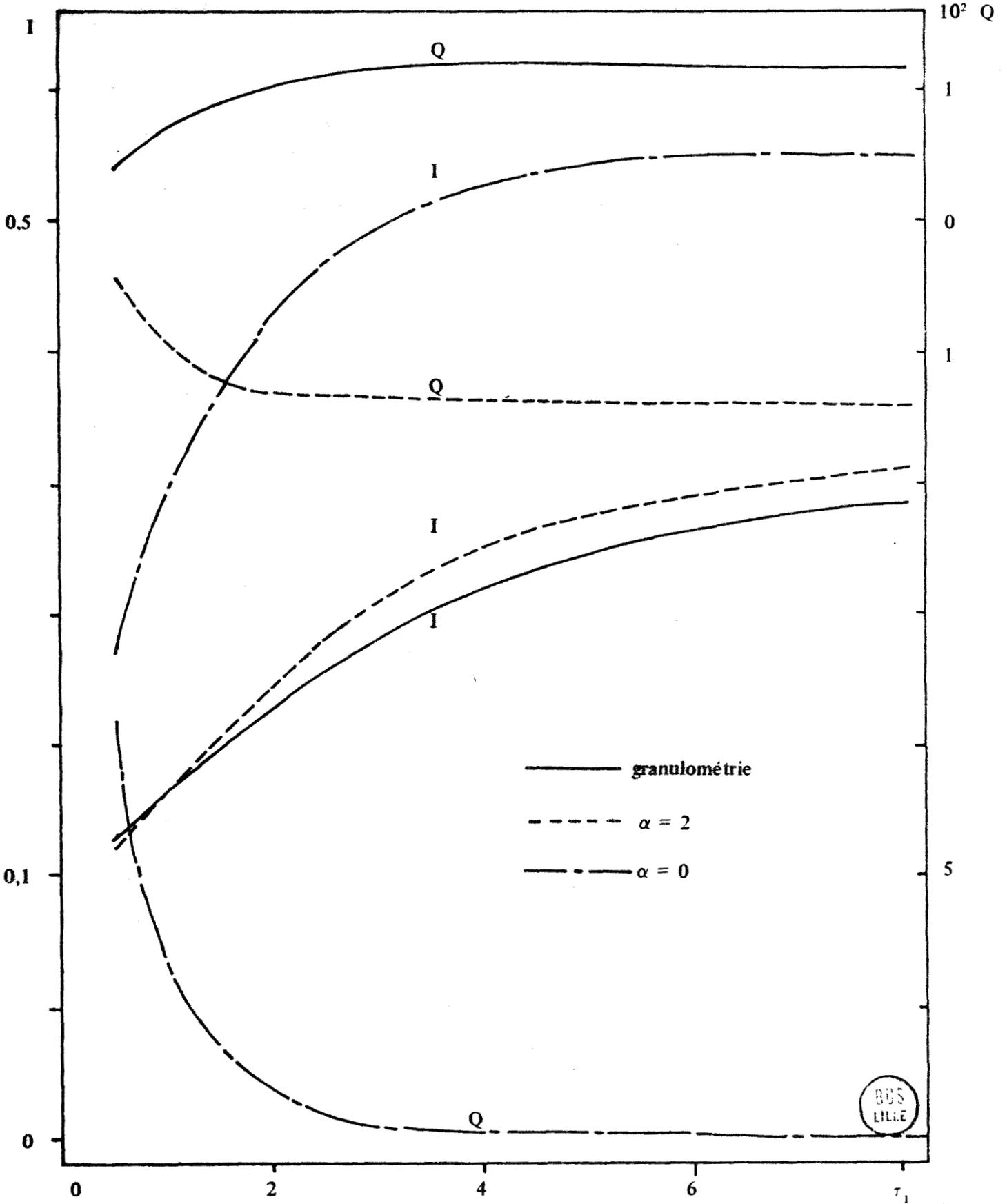


Figure II- 10

Allure de Q et I en fonction de l'épaisseur optique de la couche
(Incidence normale ; $\omega_0=0,95$)



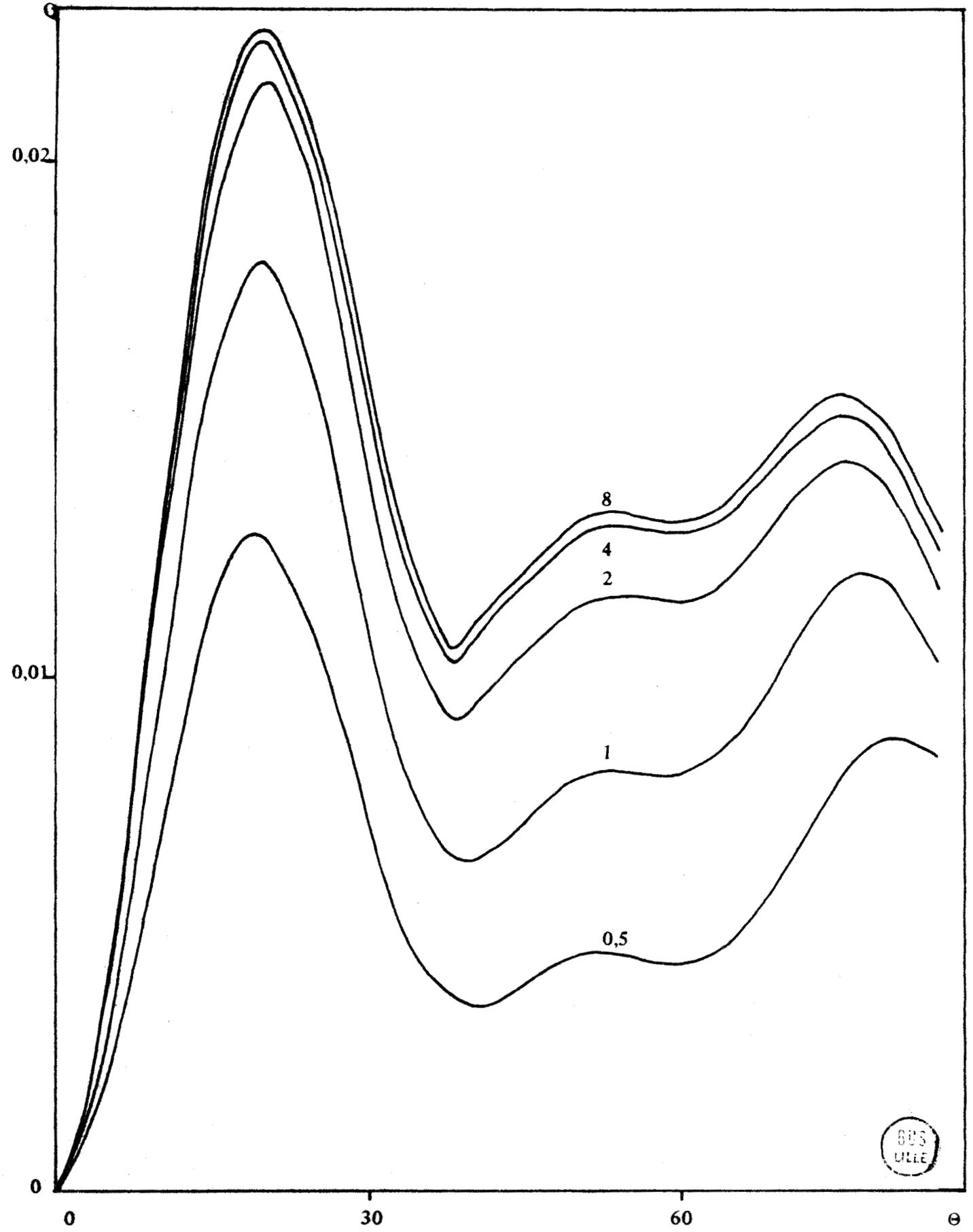


Figure II- 11

Diagramme de luminance polarisée émergeant à $\tau=0$ en fonction de l'épaisseur τ_1 de la couche dont les valeurs sont portées sur les courbes (Granulométrie) (Incidence normale : $\omega_0=0,95$)

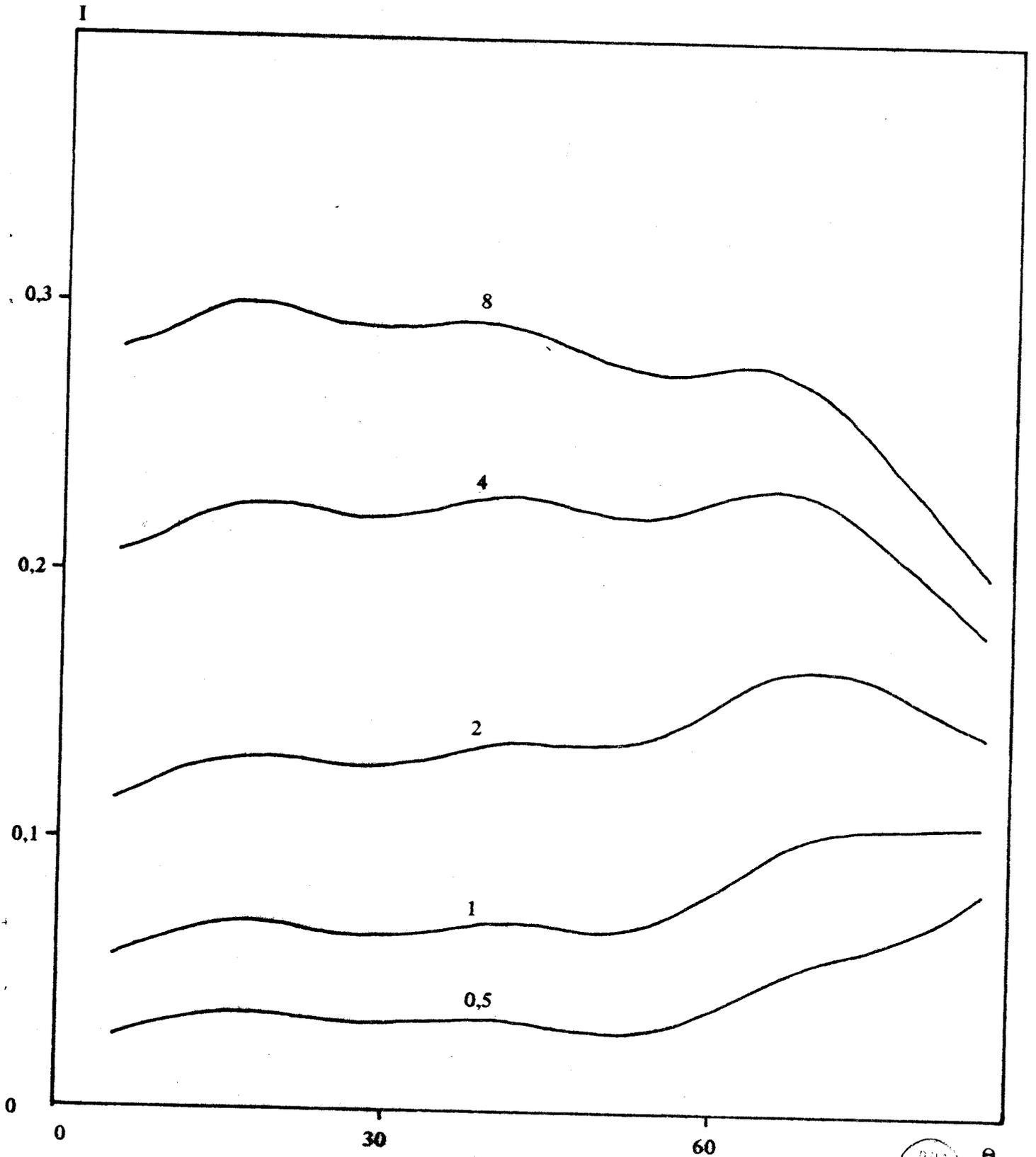


Figure II- 12

Même légende que II- 11 pour la luminance totale.



e

I . 10¹

Q . 10²

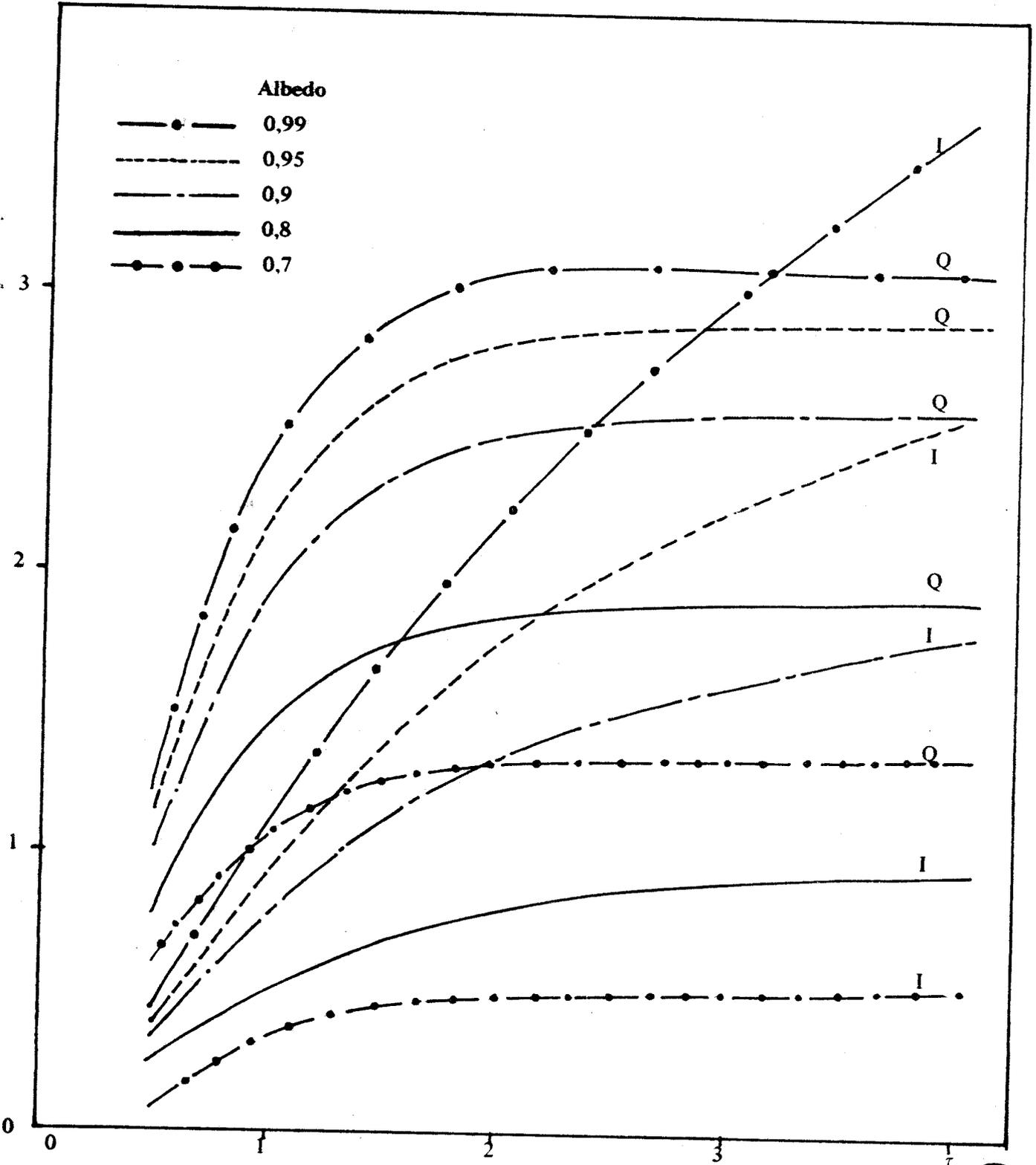


Figure II- 13

Influence de l'albedo sur la saturation de Q
(Incidence normale ; $\alpha = 2$; $\mu = 0,5$)



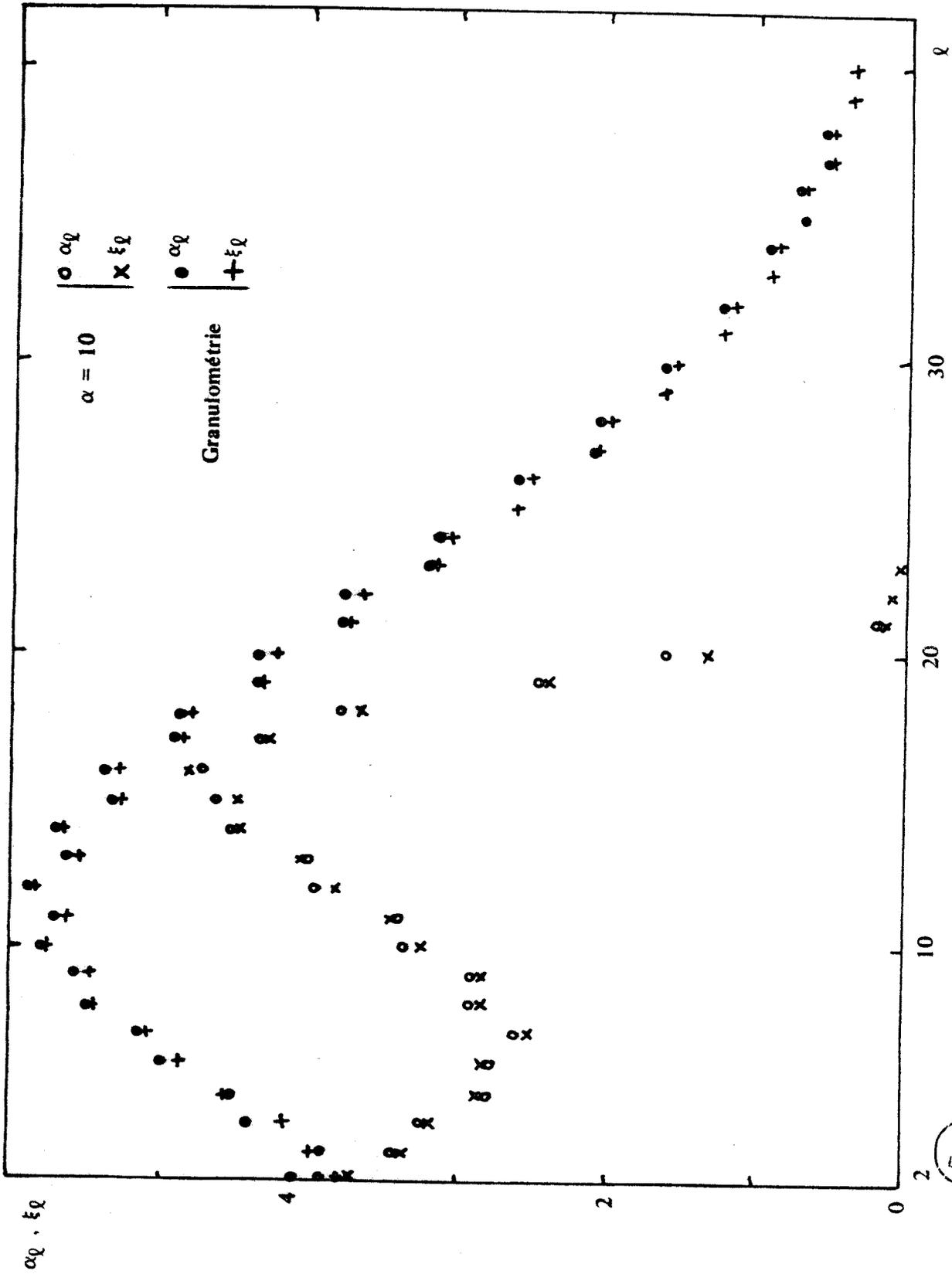


Figure III-1

Coefficients α_q et ξ_q pour $\alpha = 10$ et la granulométrie de Vénus à $\lambda = 0,527 \mu\text{m}$



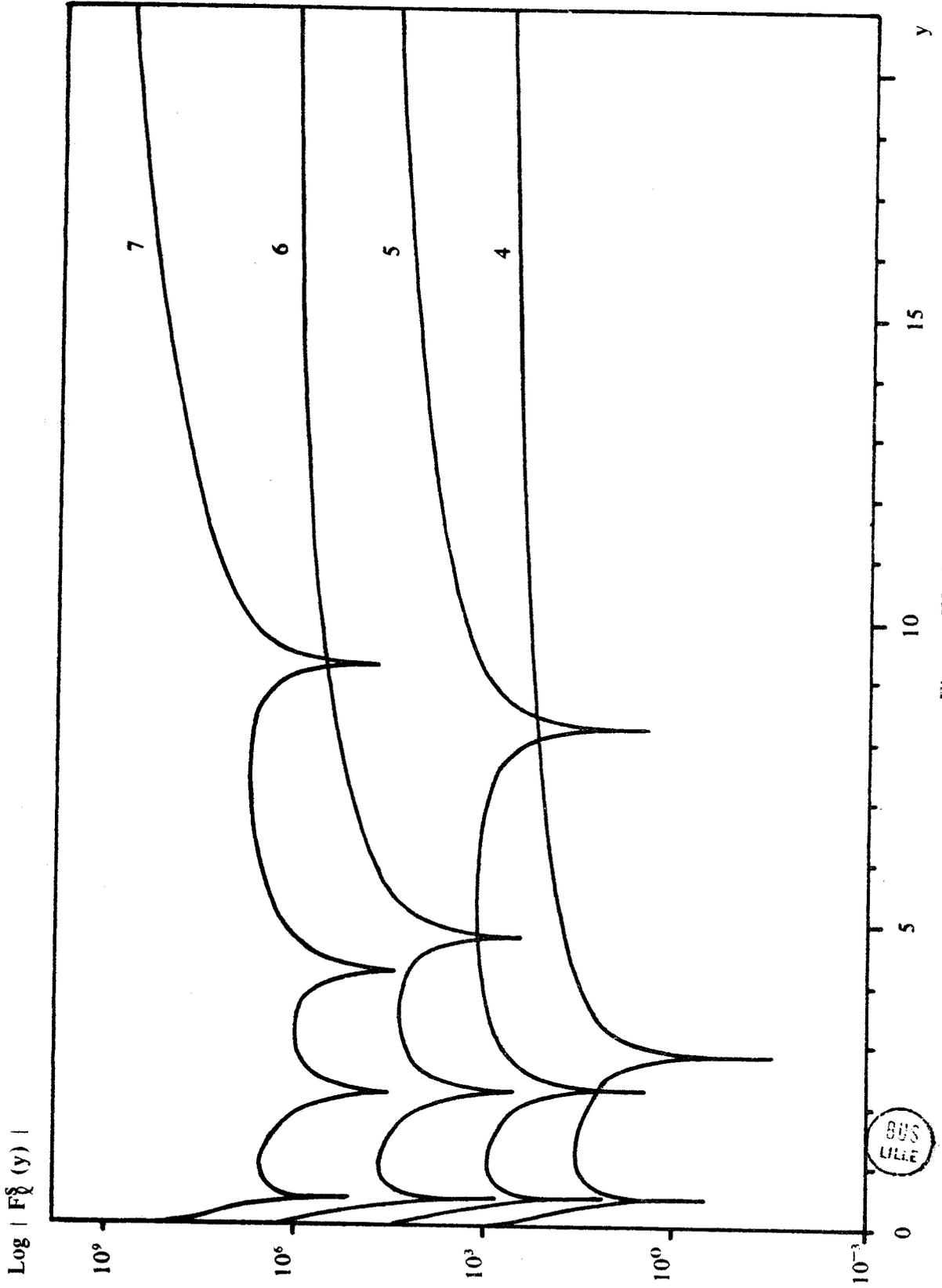


Figure III-2
Allure du polynôme $F_{\lambda}(y)$. Chaque « pic » correspond à une racine

$\text{Log} | F_Q^S(y) |$

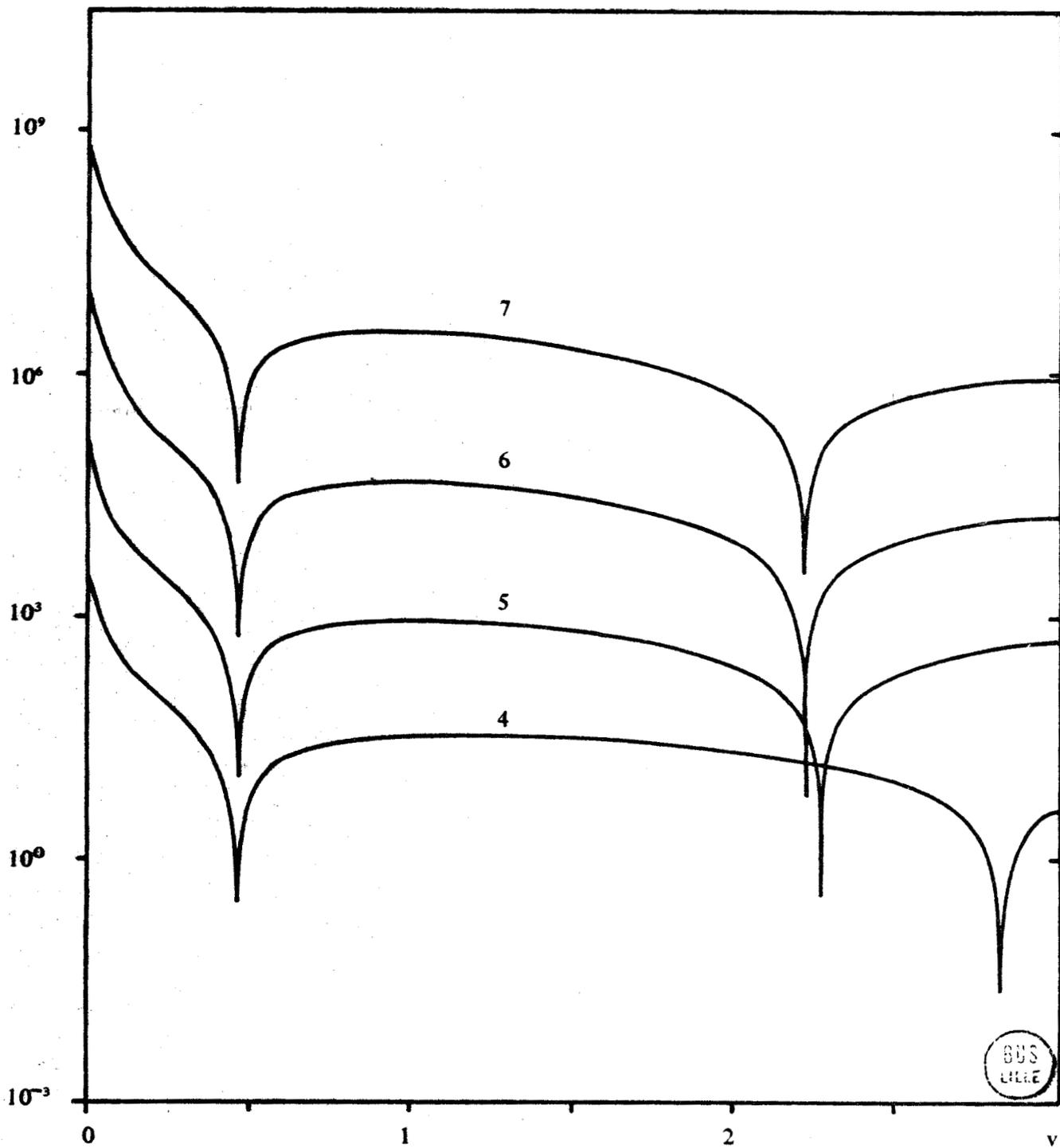


Figure III- 3

Détail de la figure III- 2 permettant d'observer la stabilisation rapide
des premières racines.

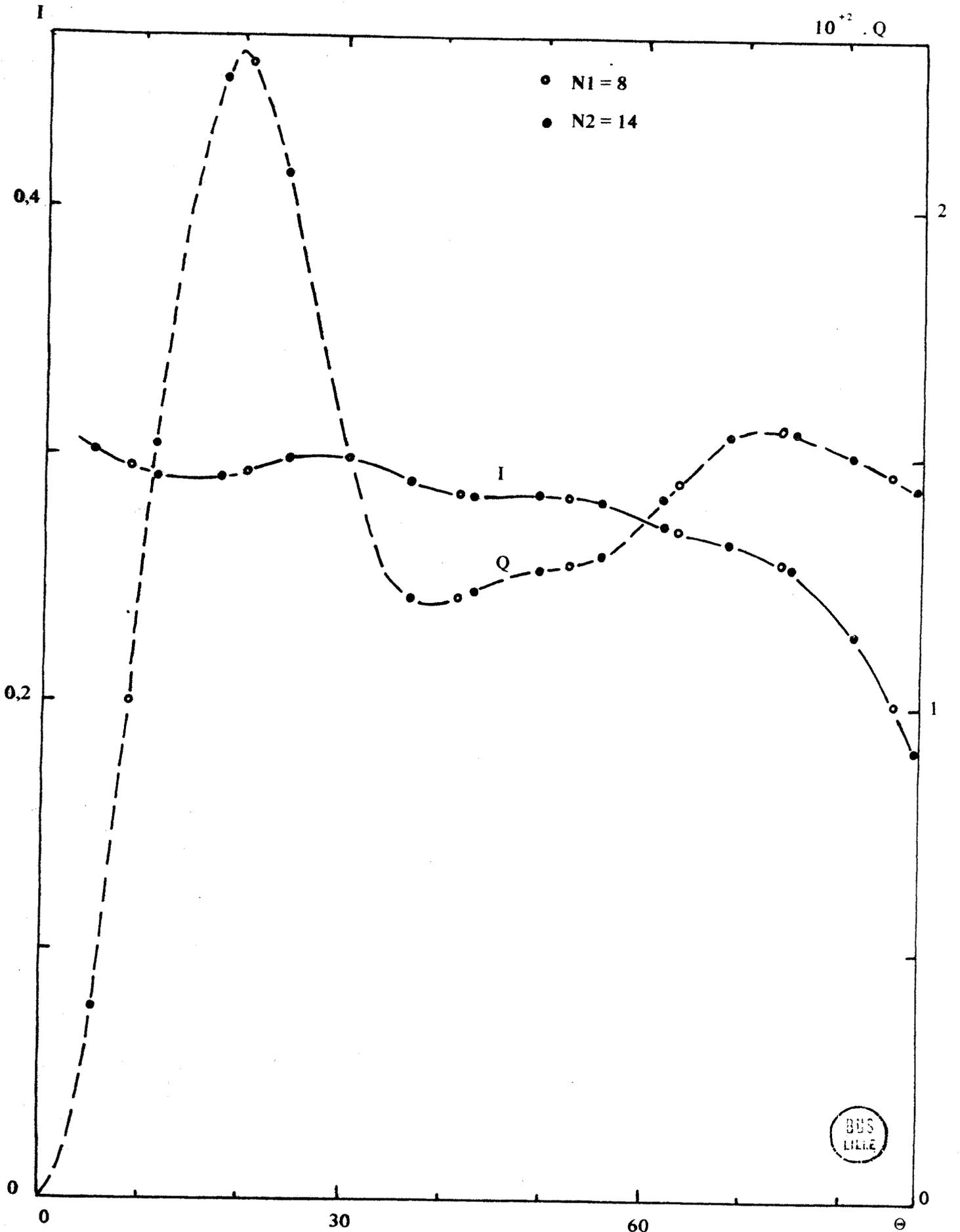


Figure IV-1

Influence du nombre de points de Gauss (Granulométrie à $1,5 \mu\text{m}$ Incidence normale :
 $\tau_1 = 8 ; \omega_0 = 0,95$)

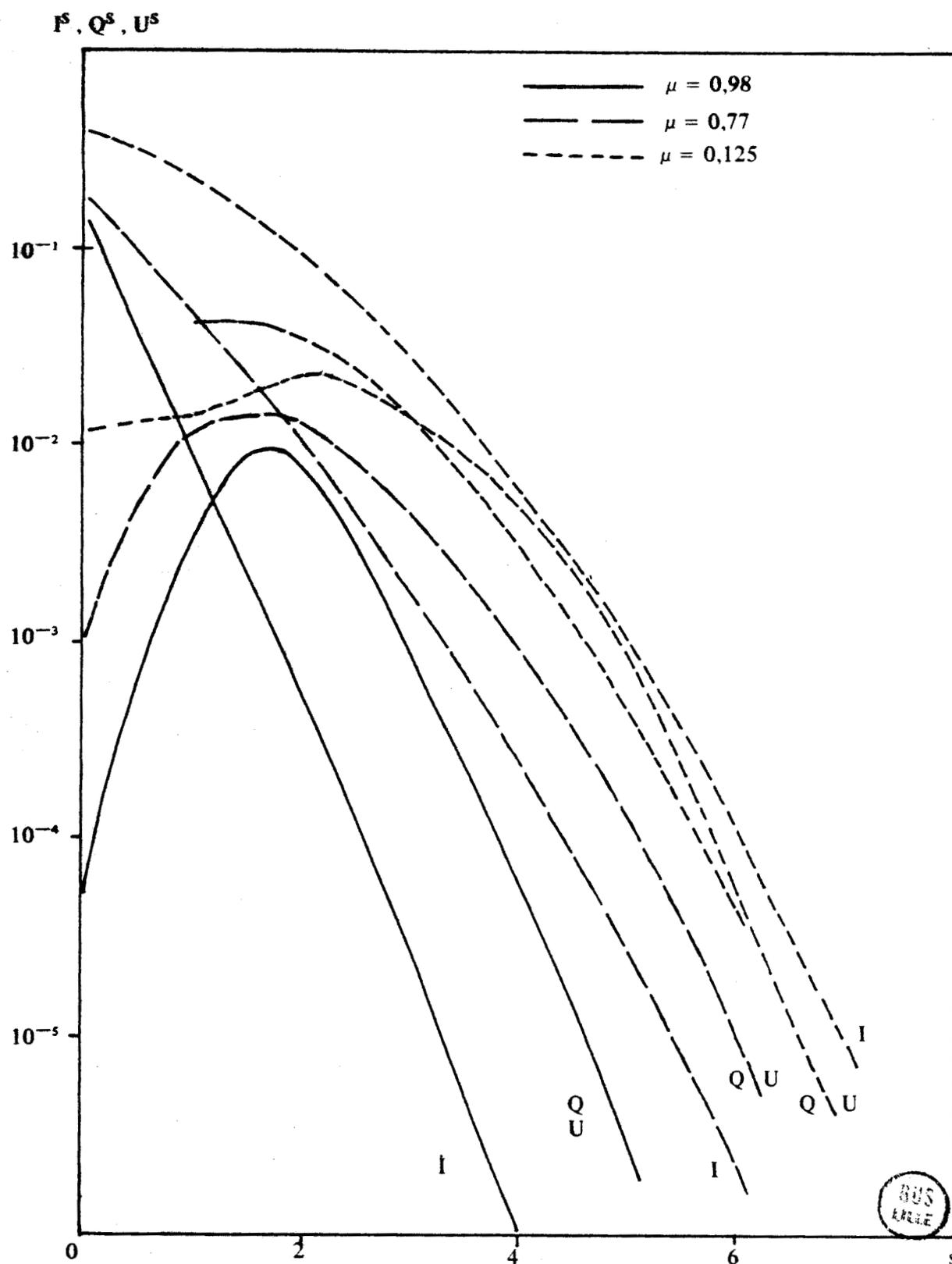


Figure IV-2

Convergence des paramètres de Stokes en fonction de l'ordre s de la décomposition en série de Fourier ($\alpha = 2$) ($\mu_0 = 0,5$; $\tau_1 = 4$; $\omega_0 = 0,95$).

$$\sum_{s=0}^S (2-\delta_{0s}) Q^s (\mu_0, \mu) \cos s \phi$$

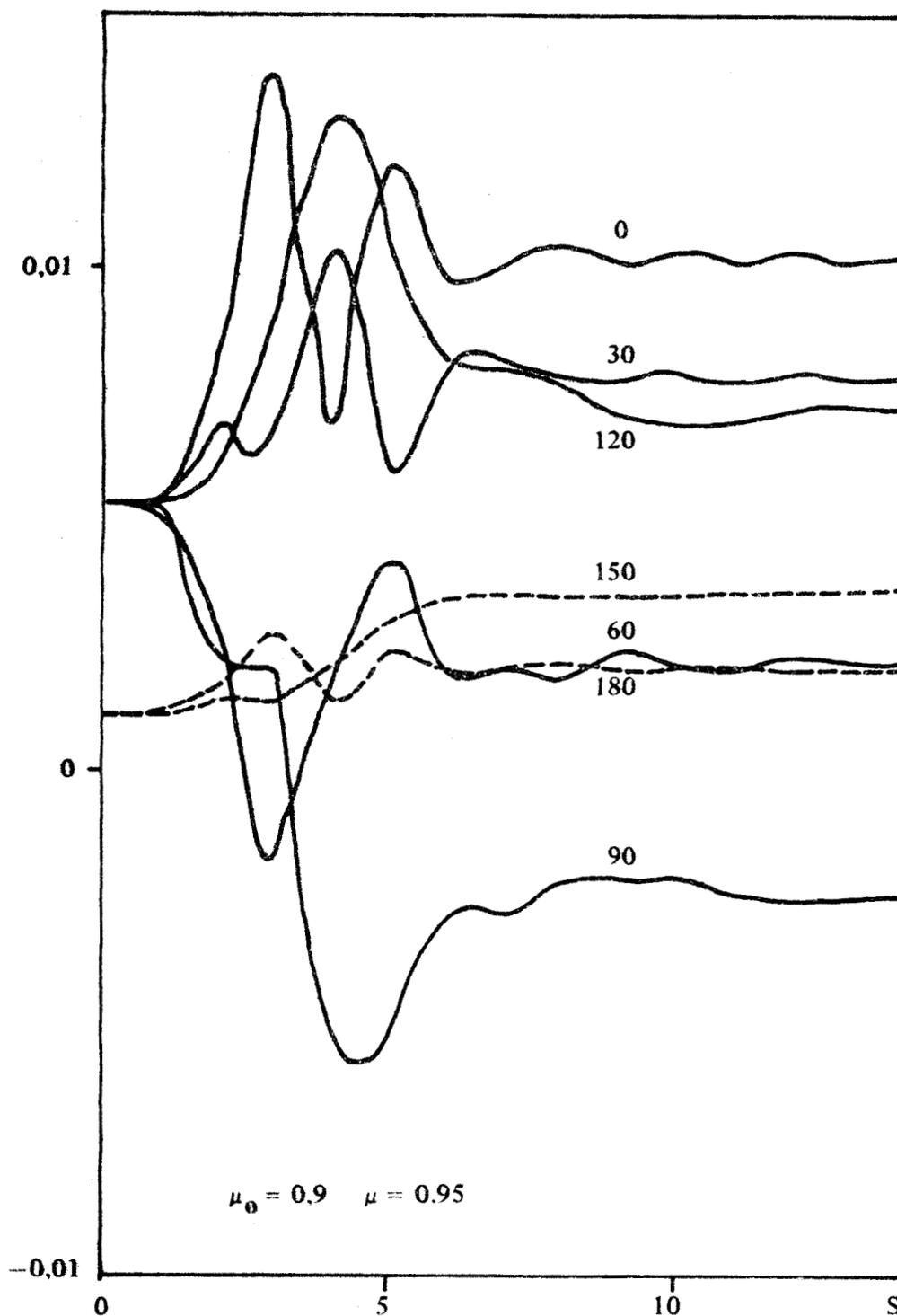


Figure IV- 3



Convergence en fonction de S du paramètre Q (Granulométrie de $0.527 \mu\text{m}$)

Les valeurs de ϕ sont notées sur les courbes.

(Ordonnée multipliée par 5 pour $\phi = 150^\circ$ et $\phi = 180^\circ$)

Epaisseur optique de la couche $\tau_1 = 6$; Albédo $\omega_0 = 1$.

$$\sum_{s=0}^S (2-\delta_{os}) Q^s(\mu_0, \mu) \cos s\phi$$

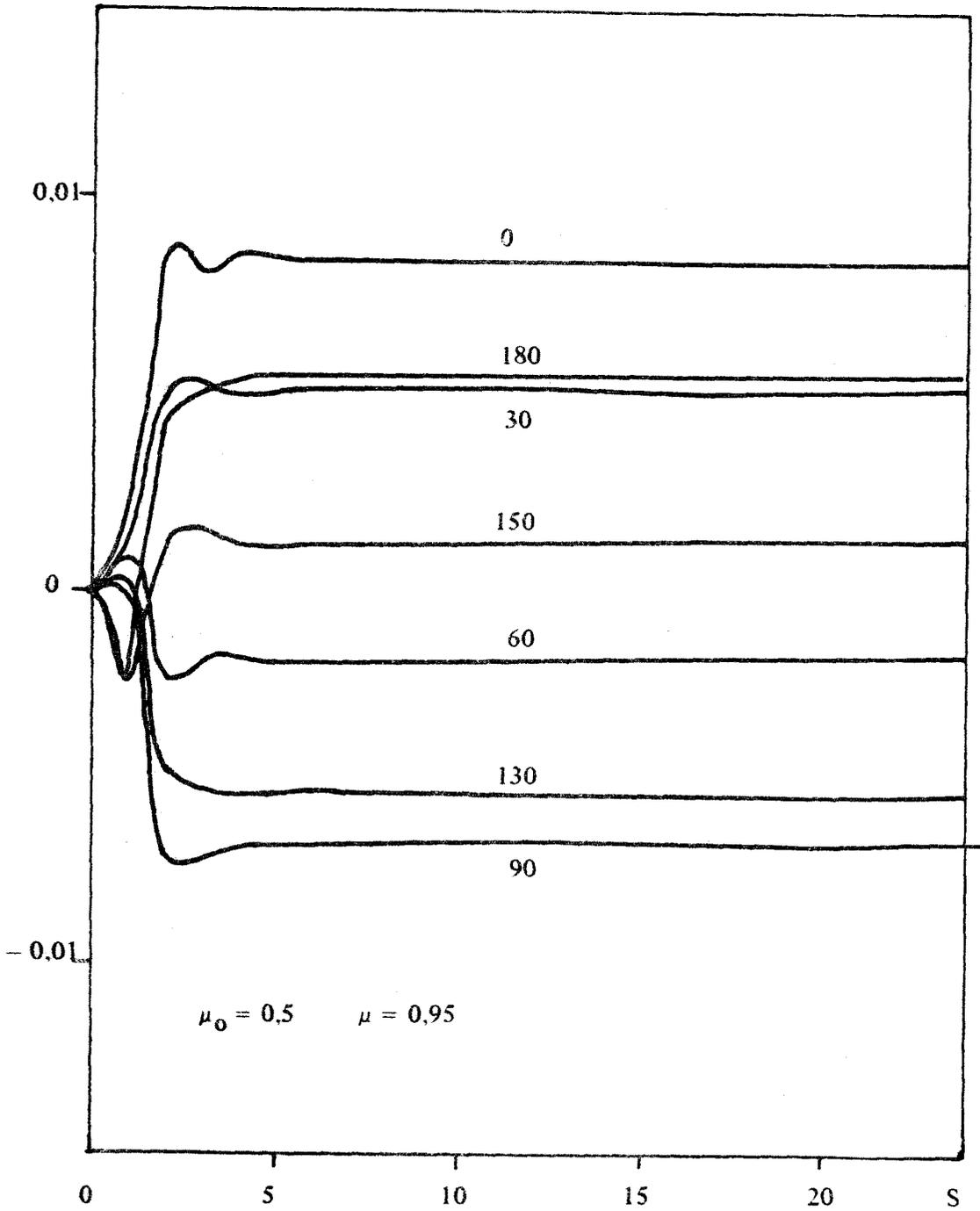


Figure IV- 4

Même légende que IV - 3



$$\sum_{s=0}^S (2 - \delta_{0s}) Q^s(\mu_0, \mu) \cos s \Phi$$

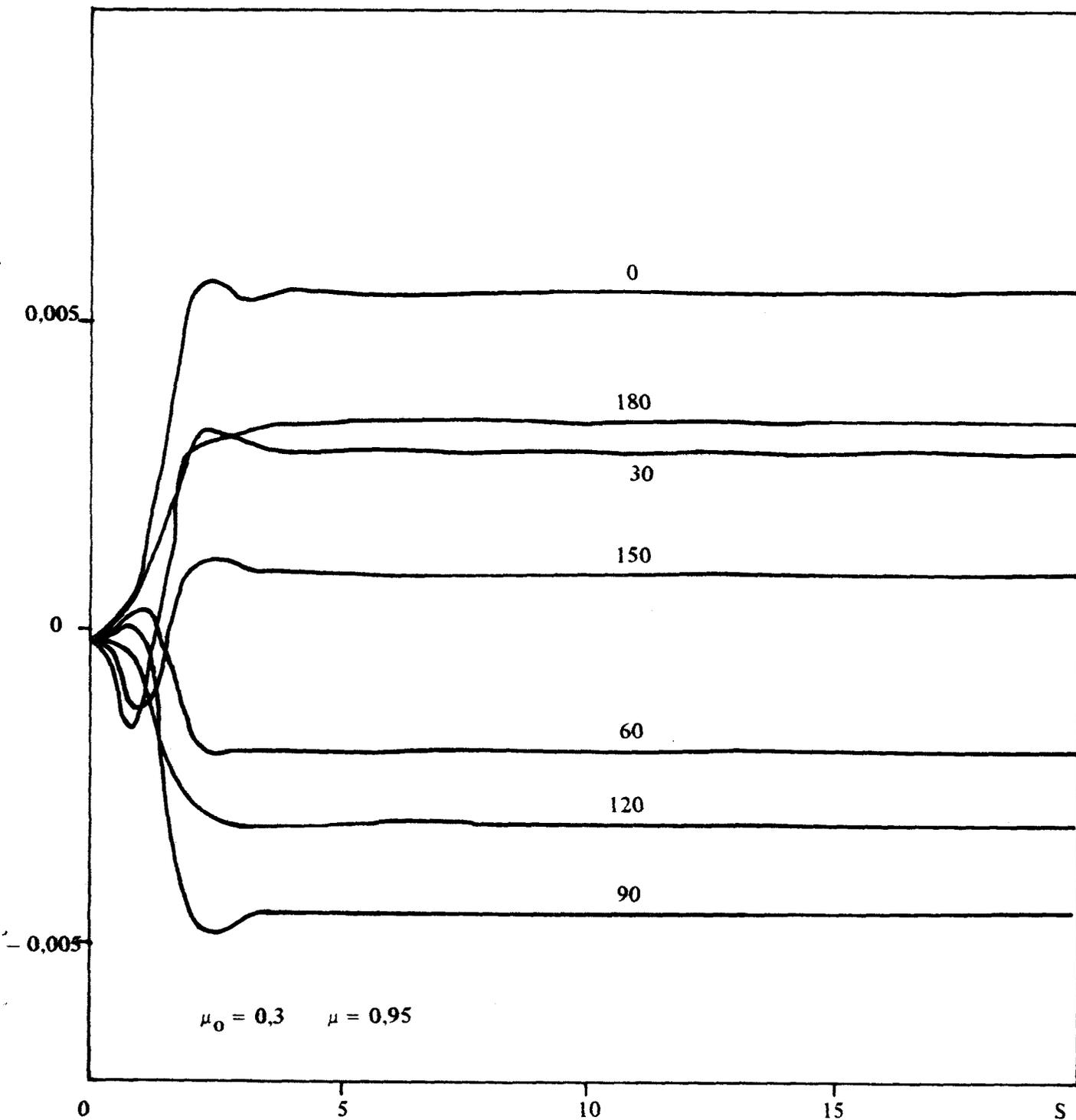


Figure IV - 5

Même légende qu'en IV - 3



$$\sum_{s=0}^S (2 - \delta_{0s}) Q^s(\mu_0, \mu) \cos s\phi$$

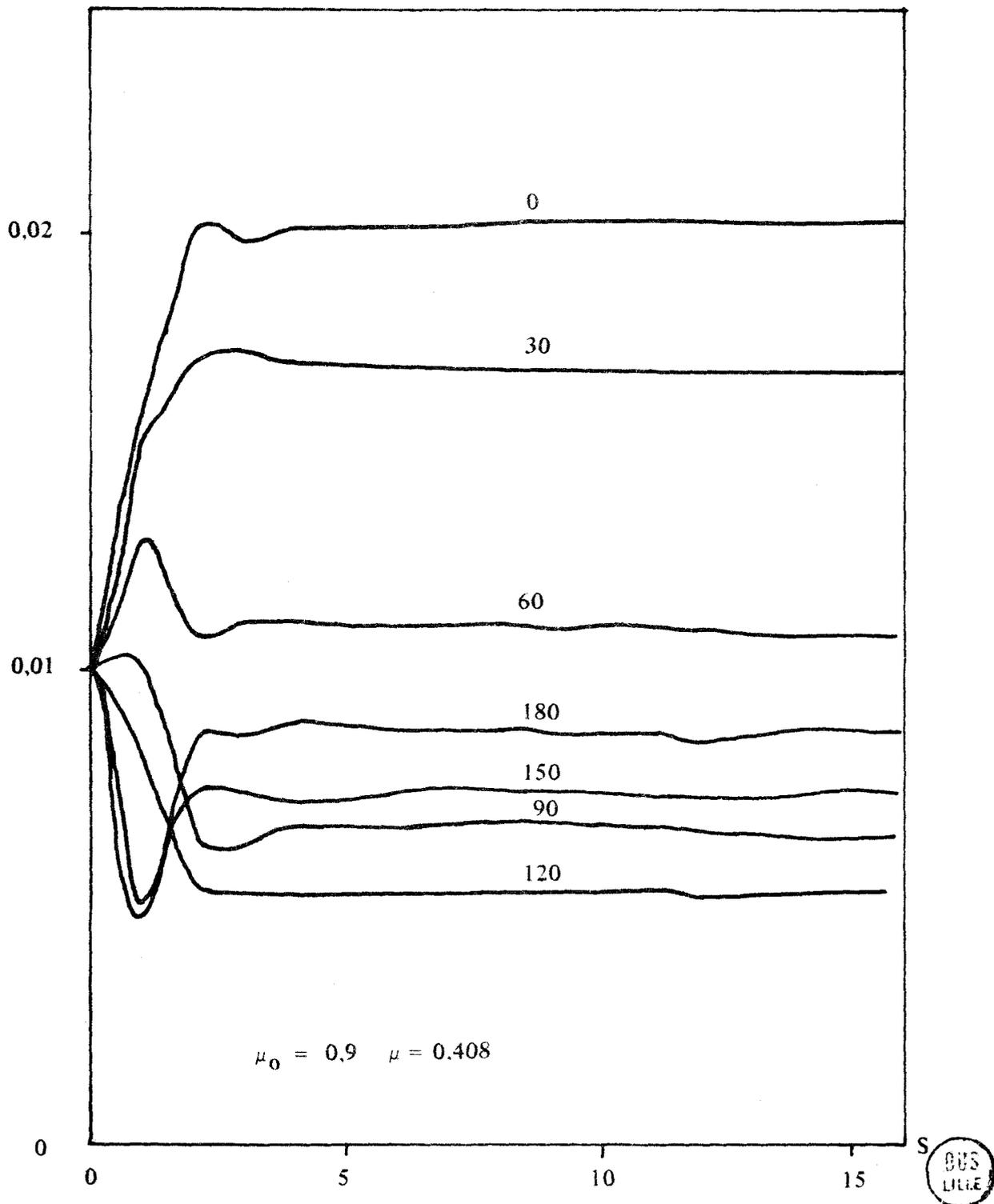


Figure IV - 6

Même légende qu'en IV - 3

$$\sum_{s=0}^S (2 - \delta_{0s}) Q^s(\mu_0, \mu) \cos s\phi$$

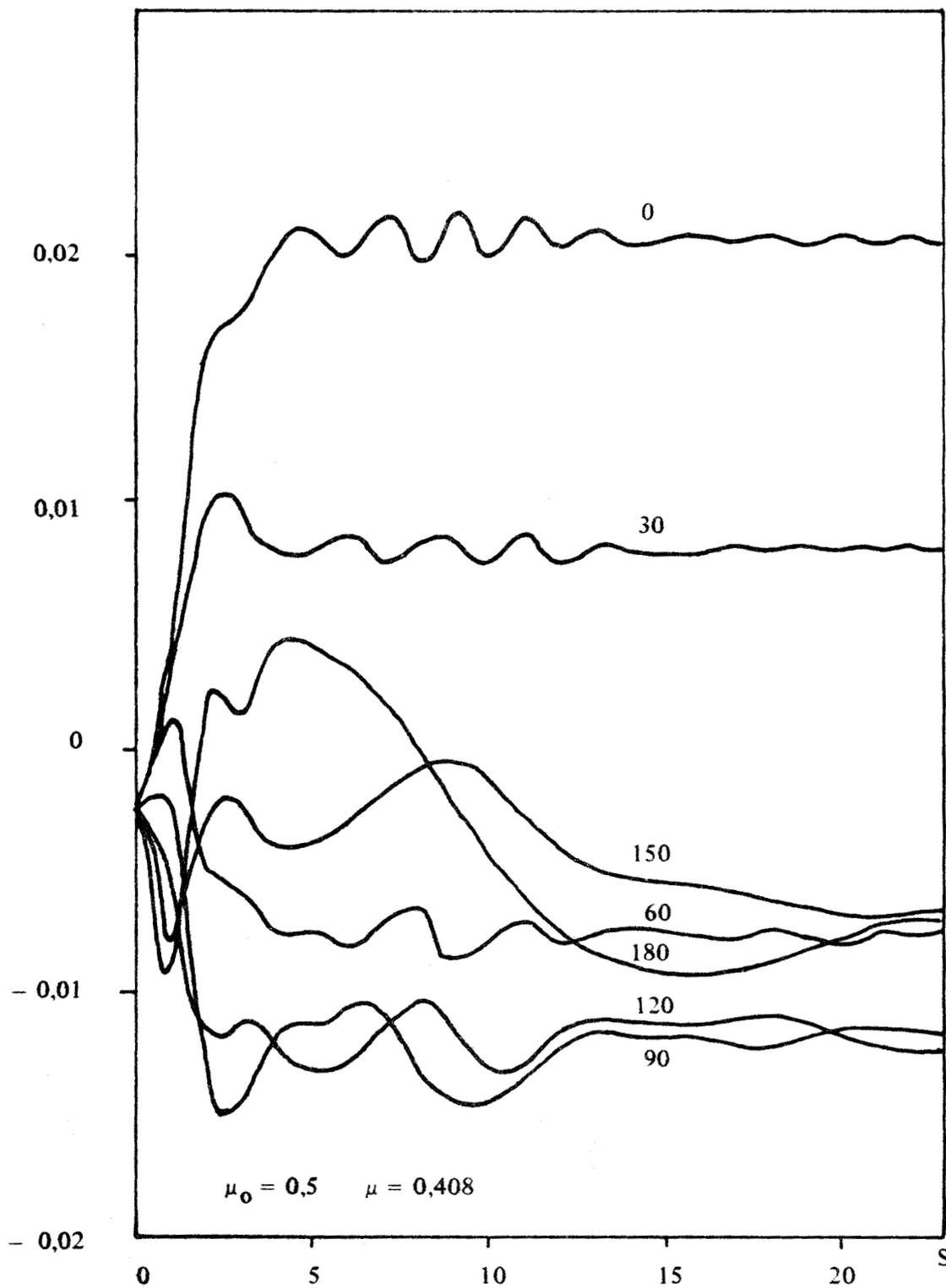


Figure IV - 7

Même légende que IV - 3



$$\sum_{s=0}^S (2 - \delta_{0s}) Q^s (\mu_0, \mu) \cos s\phi$$

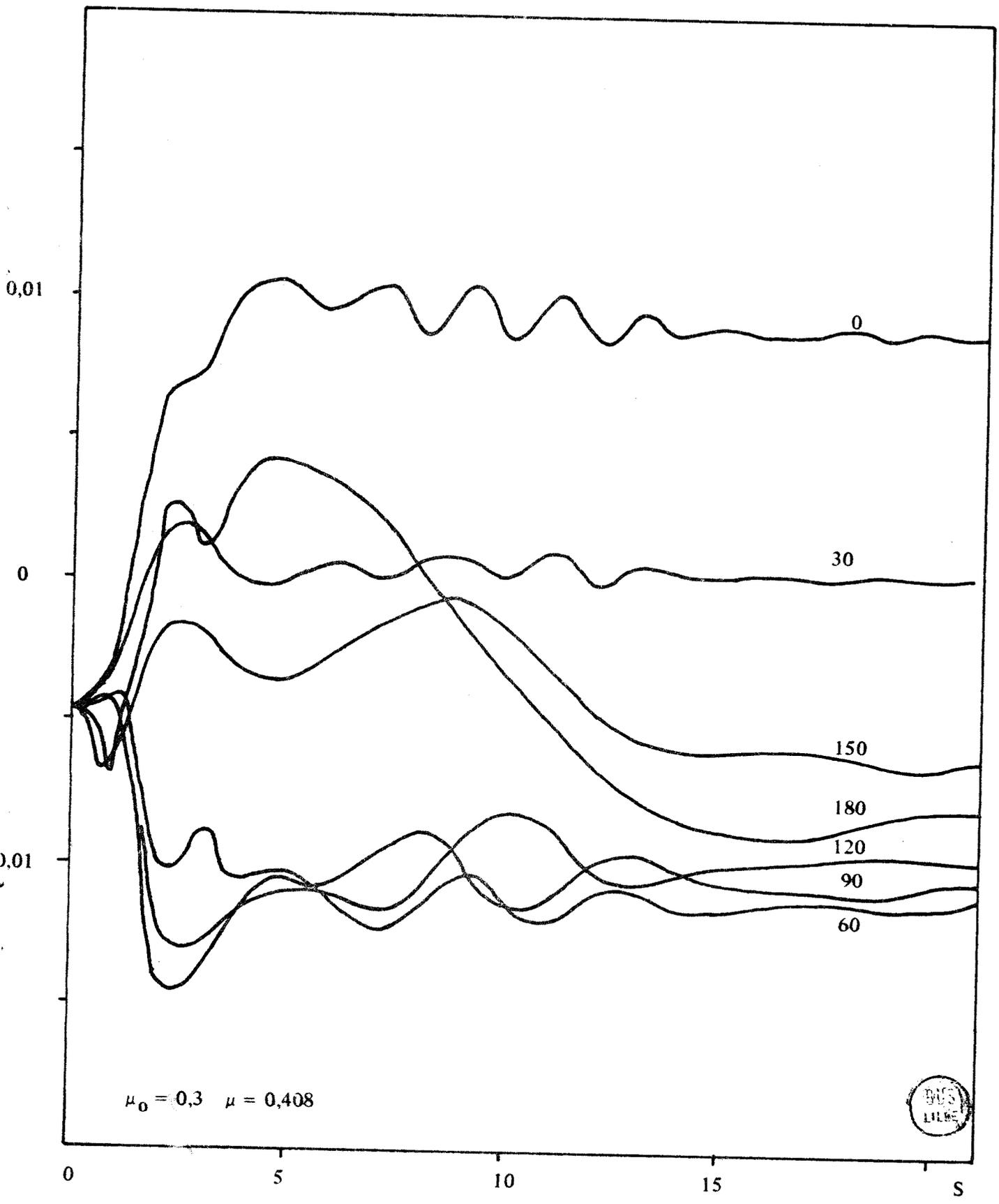


Figure IV - 8

Même légende que IV - 3

$$\sum_{n=1}^N I^n (\cos \theta)$$

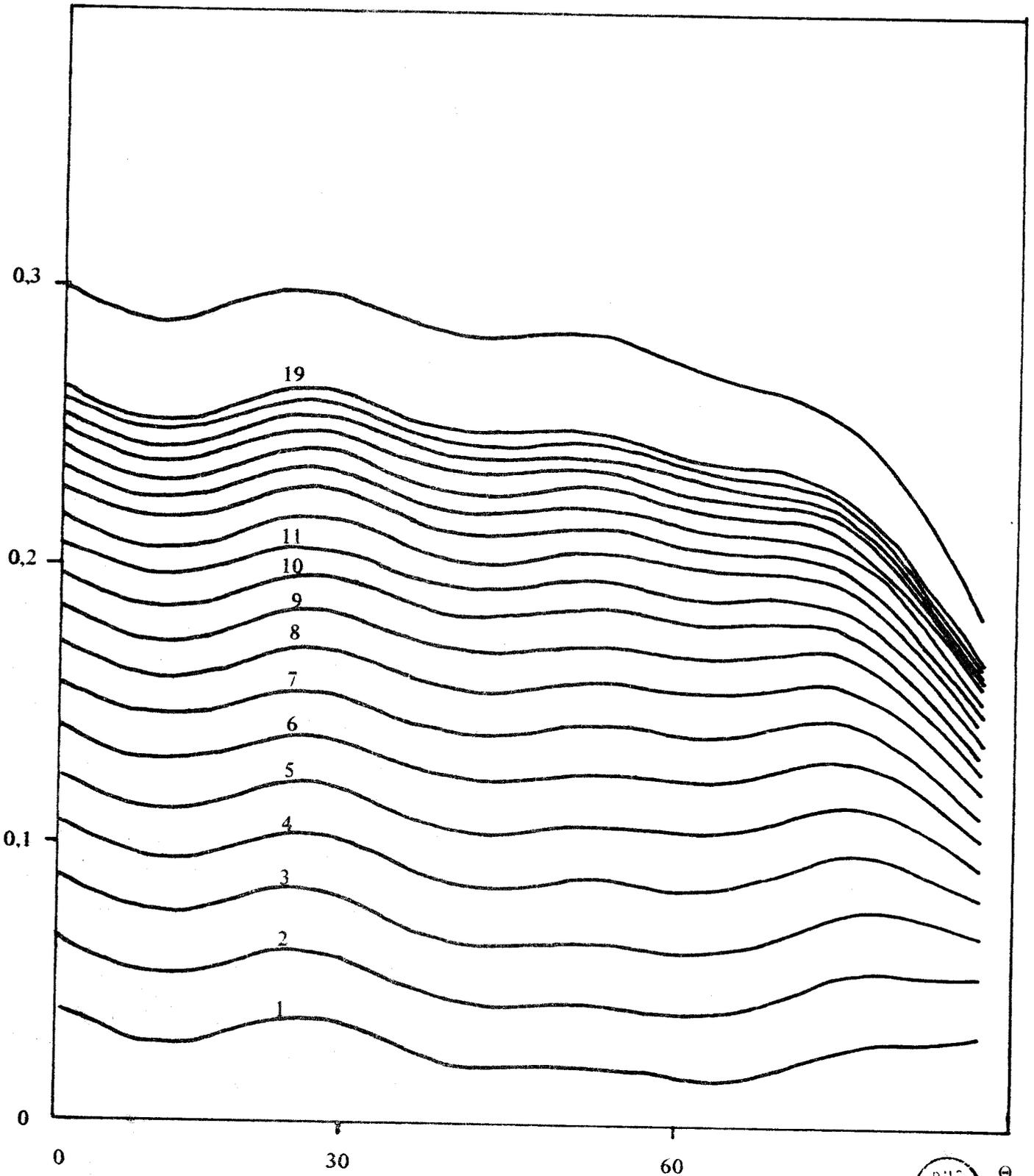


Figure IV - 9

Influence du nombre de diffusions sur la luminance totale.

(Granulométrie à 1,5 μm). La valeur de N est portée sur les courbes, (Incidence normale : $\tau_1=8$; $\omega_0 = 0,95$)



$$10^{+2} \sum_{n=1}^N Q^n (\cos \theta)$$

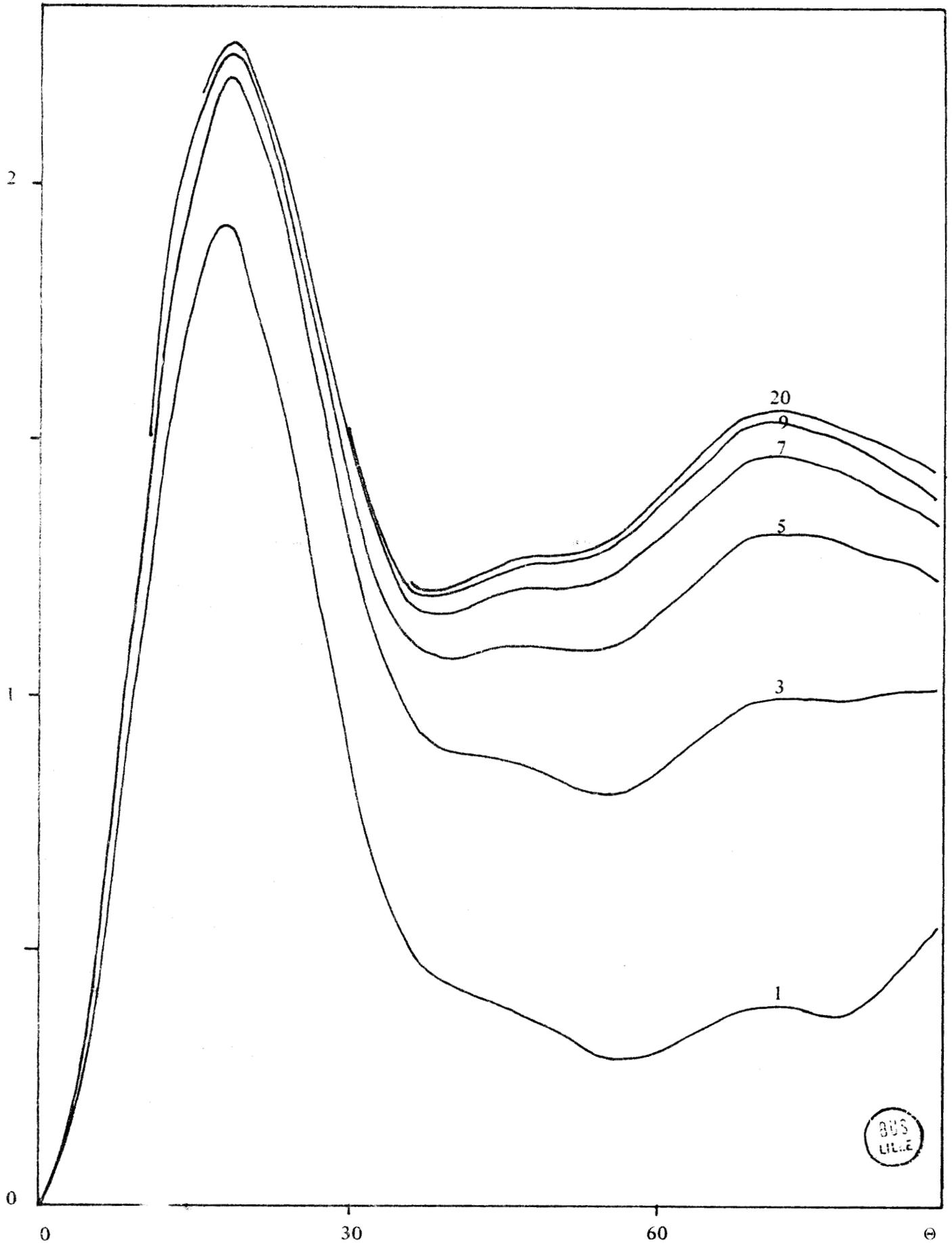


Figure IV - 10

Même légende qu'en IV - 9 avec la luminance polarisée.

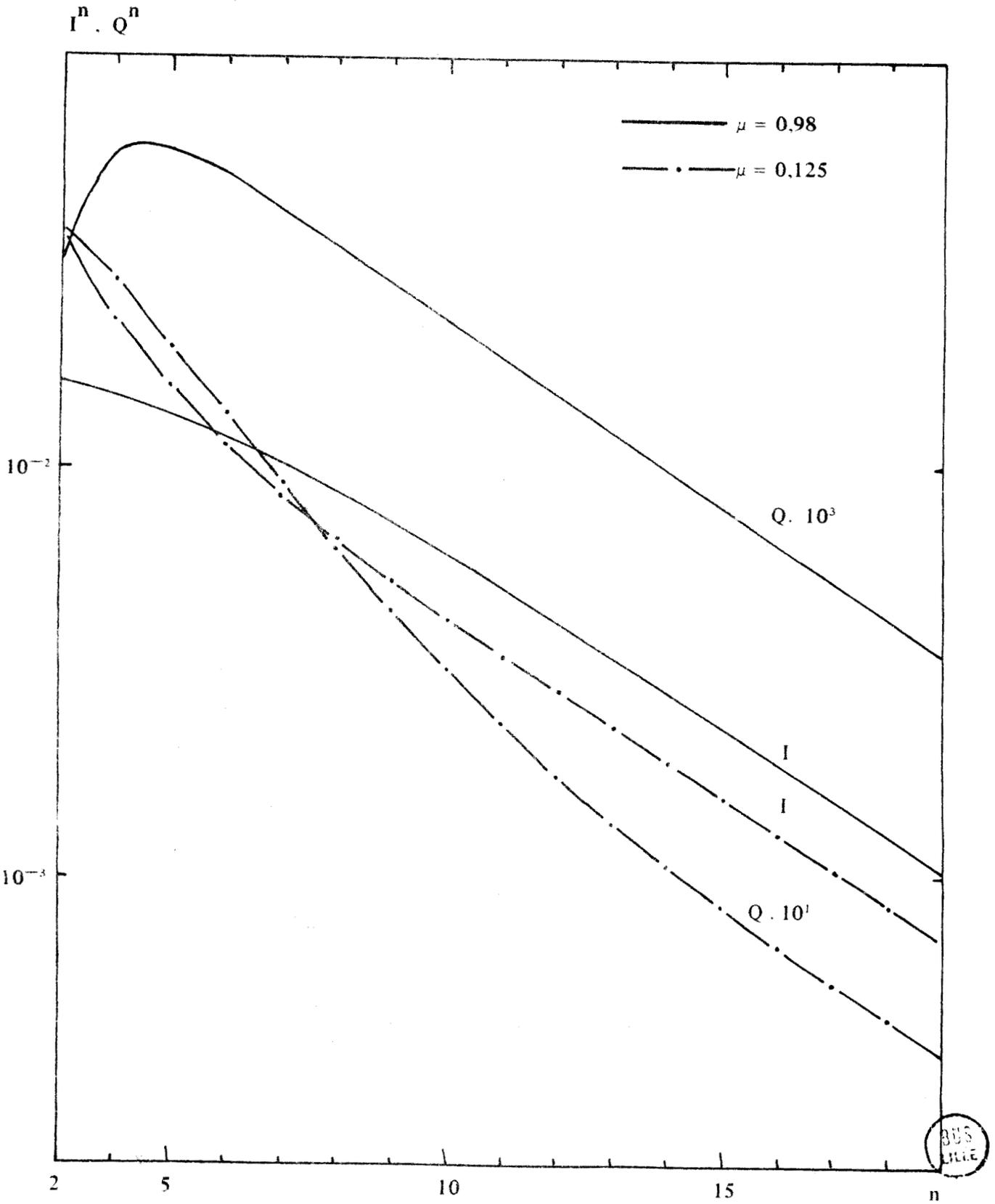


Figure IV - 11

Luminances I^n et Q^n émergeant à $\tau = 0$ après n diffusions.

($\alpha = 2$; $s = 0$; $\mu_0 = 0.5$; $\omega_0 = 0.95$; $\tau_1 = 4$)

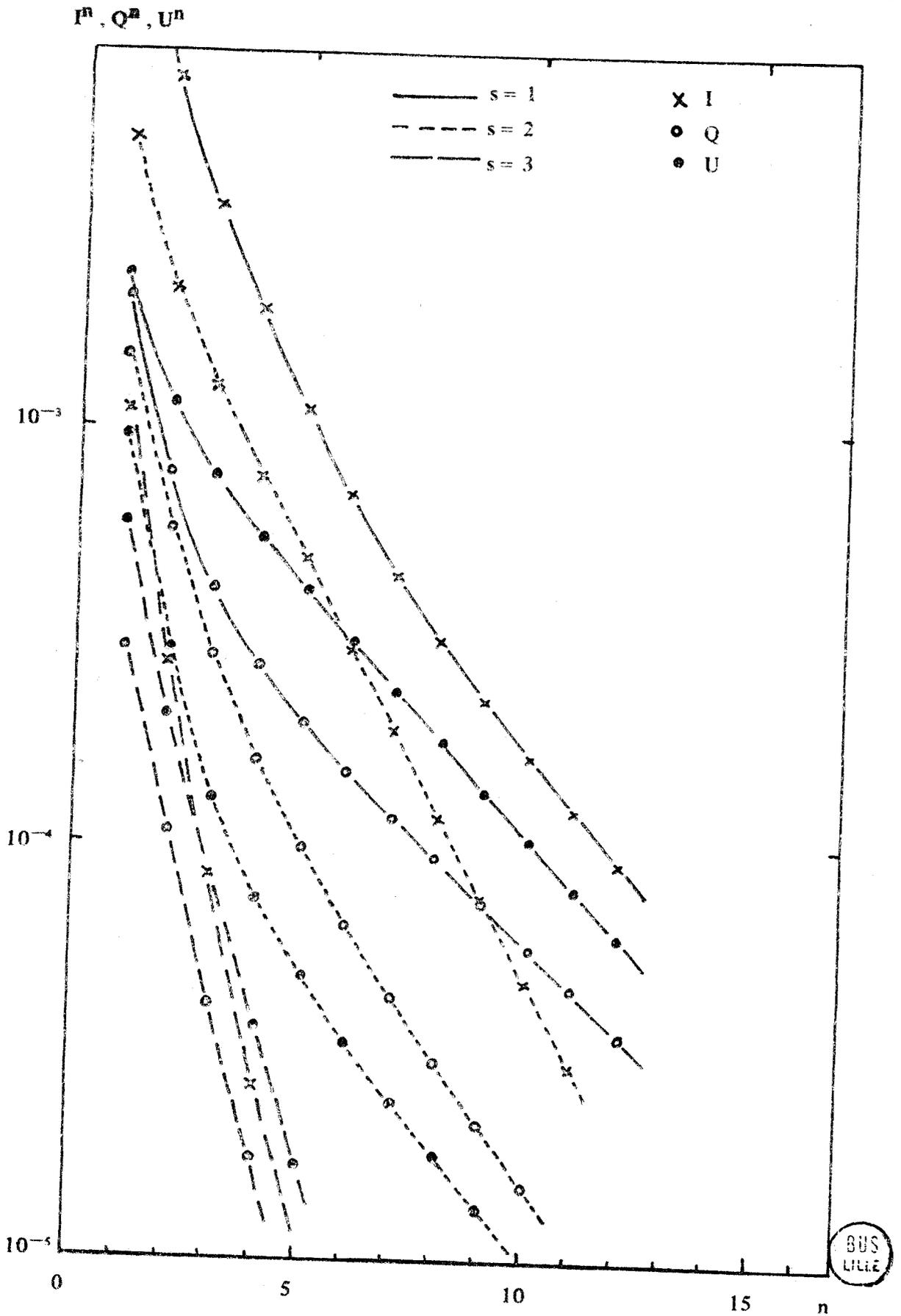


Figure IV - 12

Même légende qu'en IV - 11 pour plusieurs valeurs de s .
(Granulométrie à $\lambda = 0,527 \mu\text{m}$, $\mu_0 = 0,9$; $\mu = 0,03$; $\tau_1 = 6$).

$$\sum_{\ell=2}^{2p} \gamma_{\ell} P_{\ell}^2(\cos \theta)$$

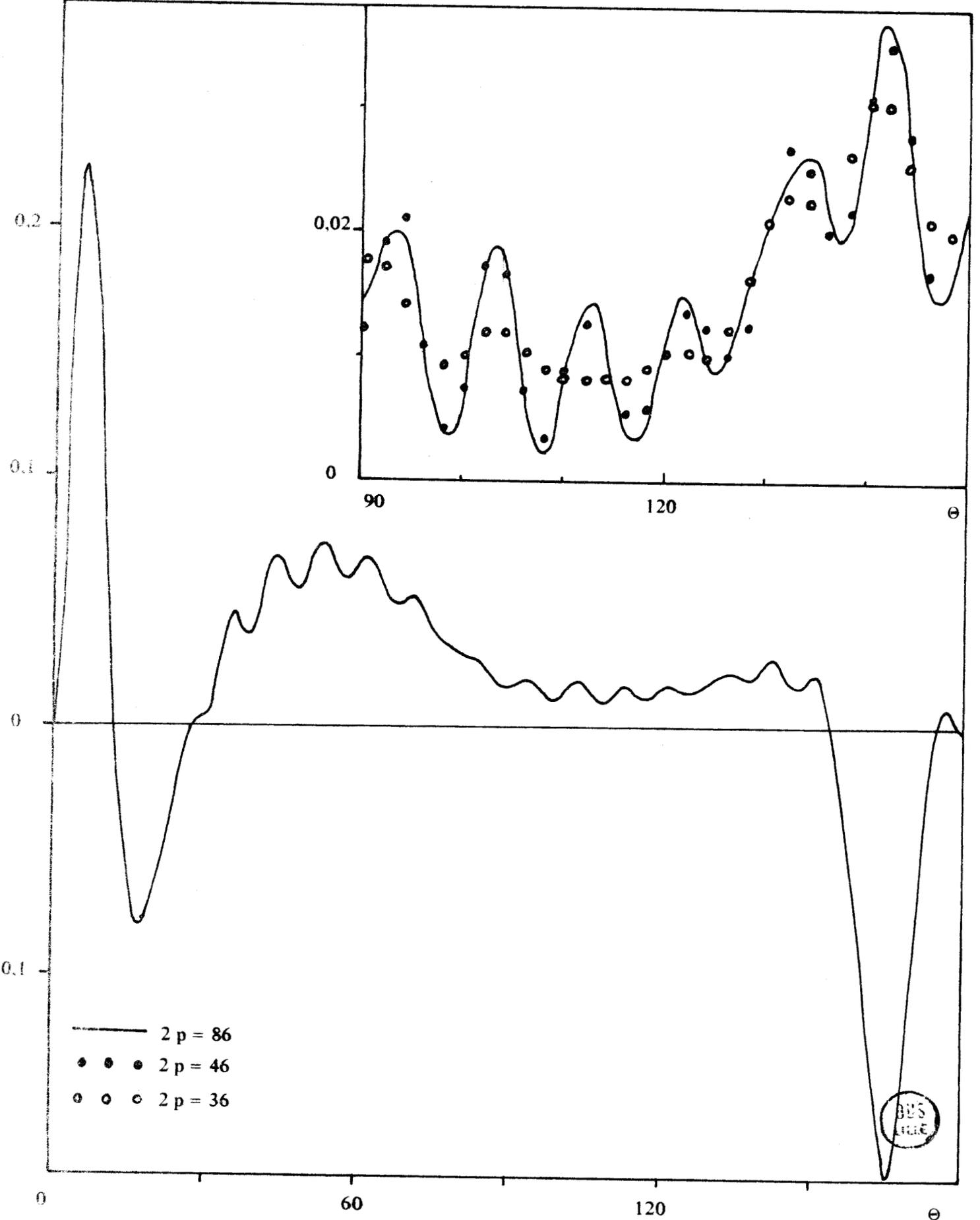


Figure V - 1

$$\sum_{\ell=2}^{2p} \alpha_{\ell} P_{\ell}^{\ell}(\cos \Theta)$$

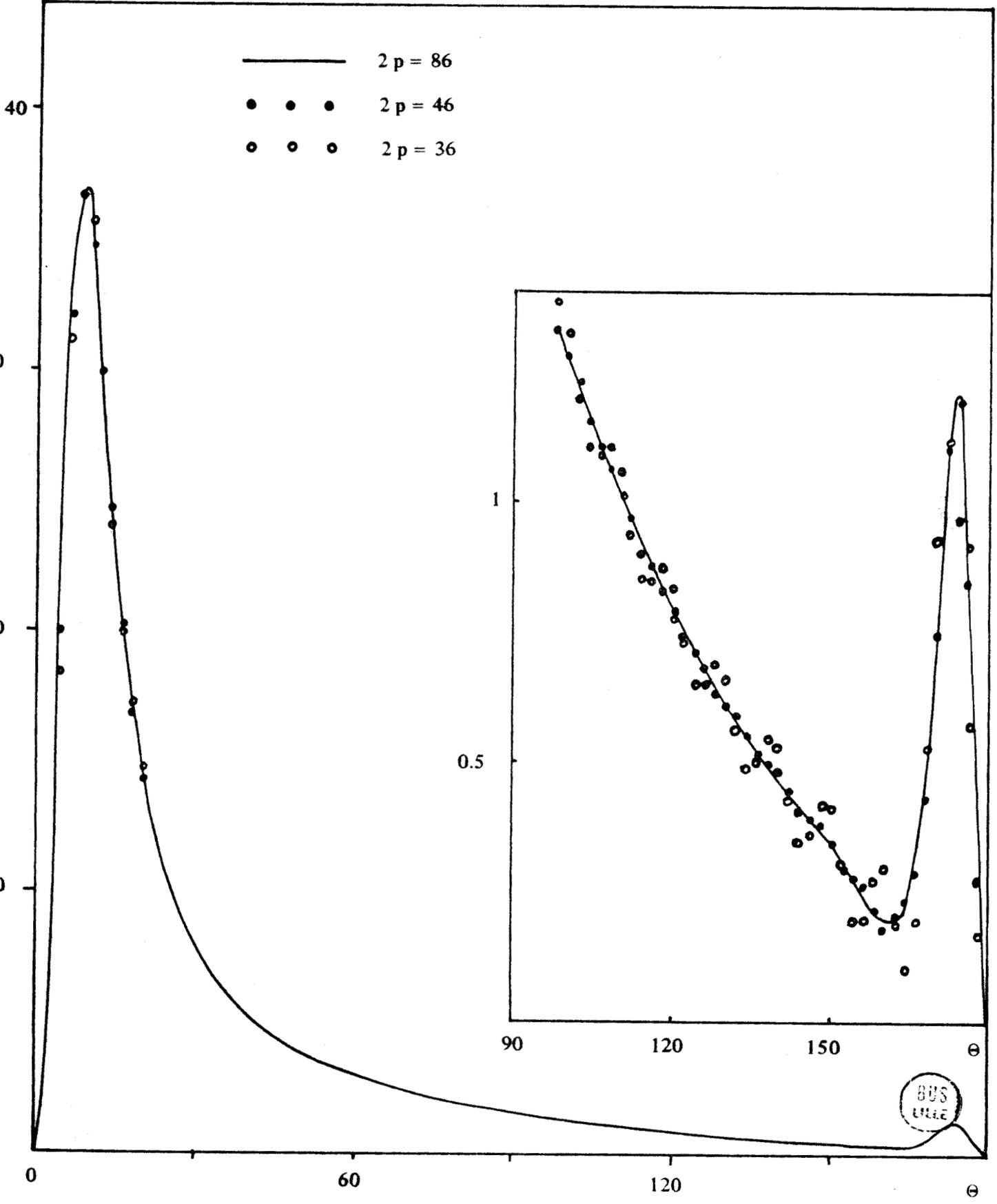


Figure V - 2

$$\text{Log} (\sum \beta_{\ell} P_{\ell} (\cos \theta))$$

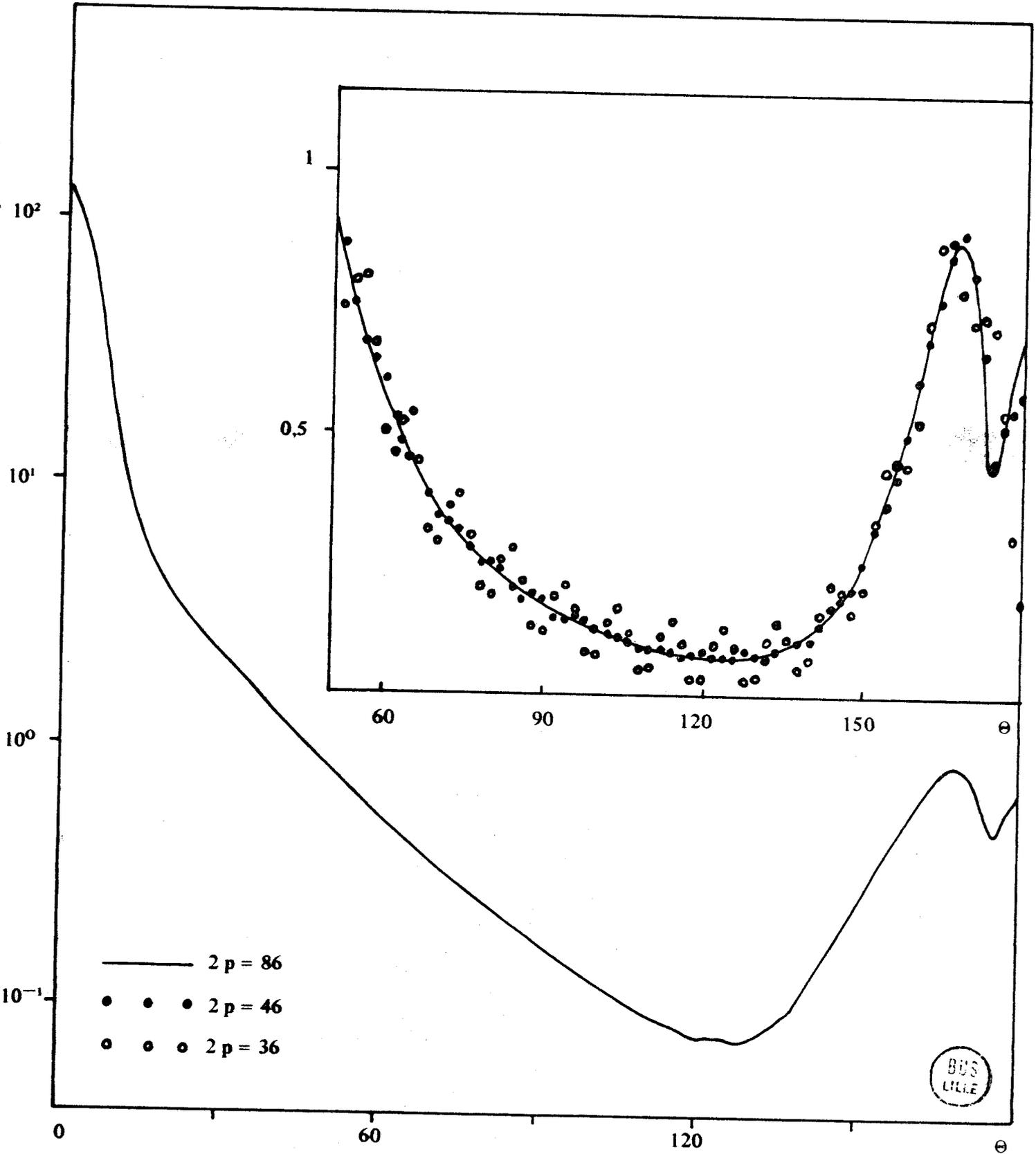


Figure V - 3

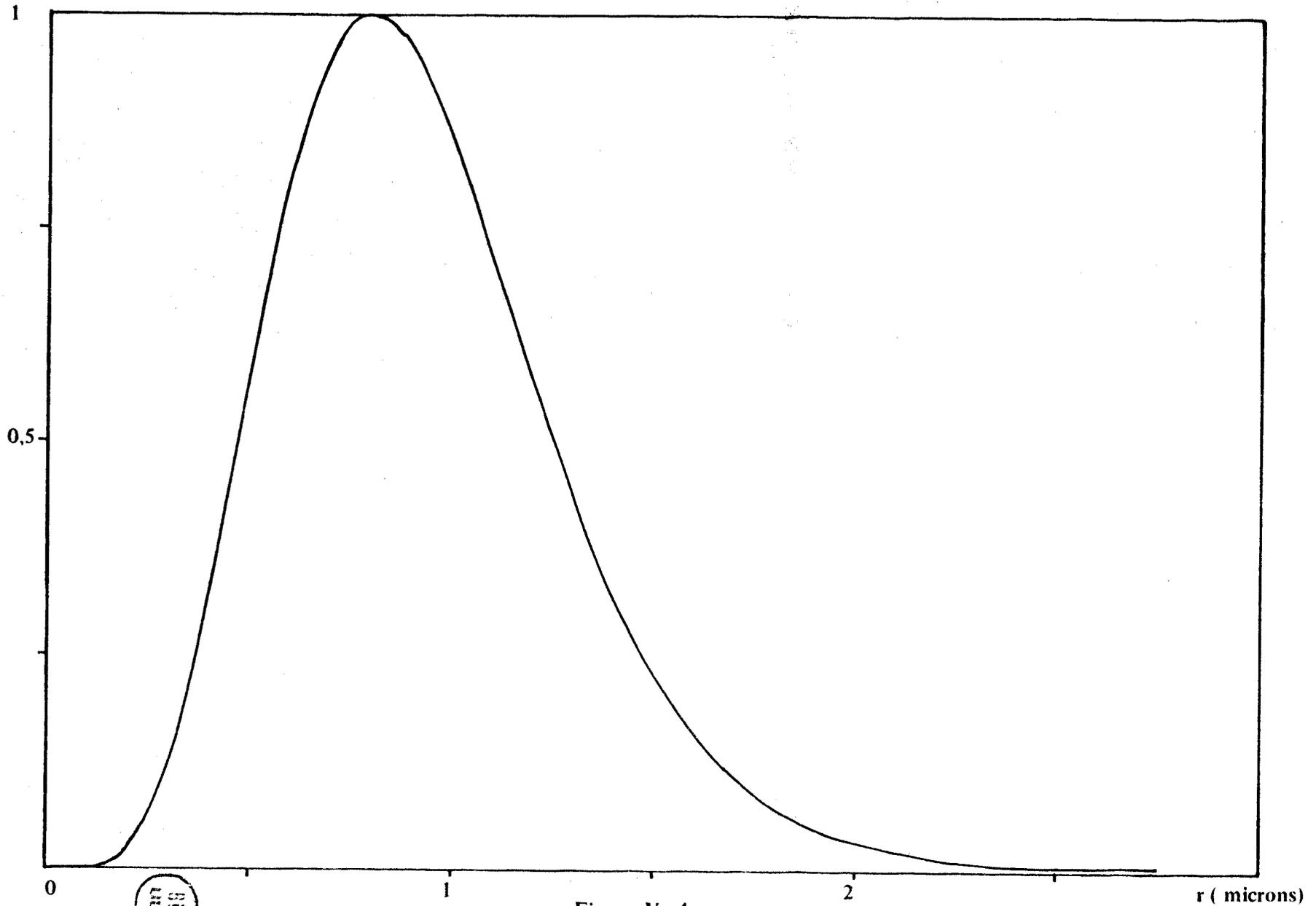


Figure V - 4

Granulométrie $n(r) = r^{p_2} \exp\left(-\frac{p_2 r}{p_1}\right)$ $p_1 = 0,8 \text{ micron}$ $p_2 = 6$

$V = 15^\circ$
 $\omega_0 = 0,99995$
 $\delta = 0$

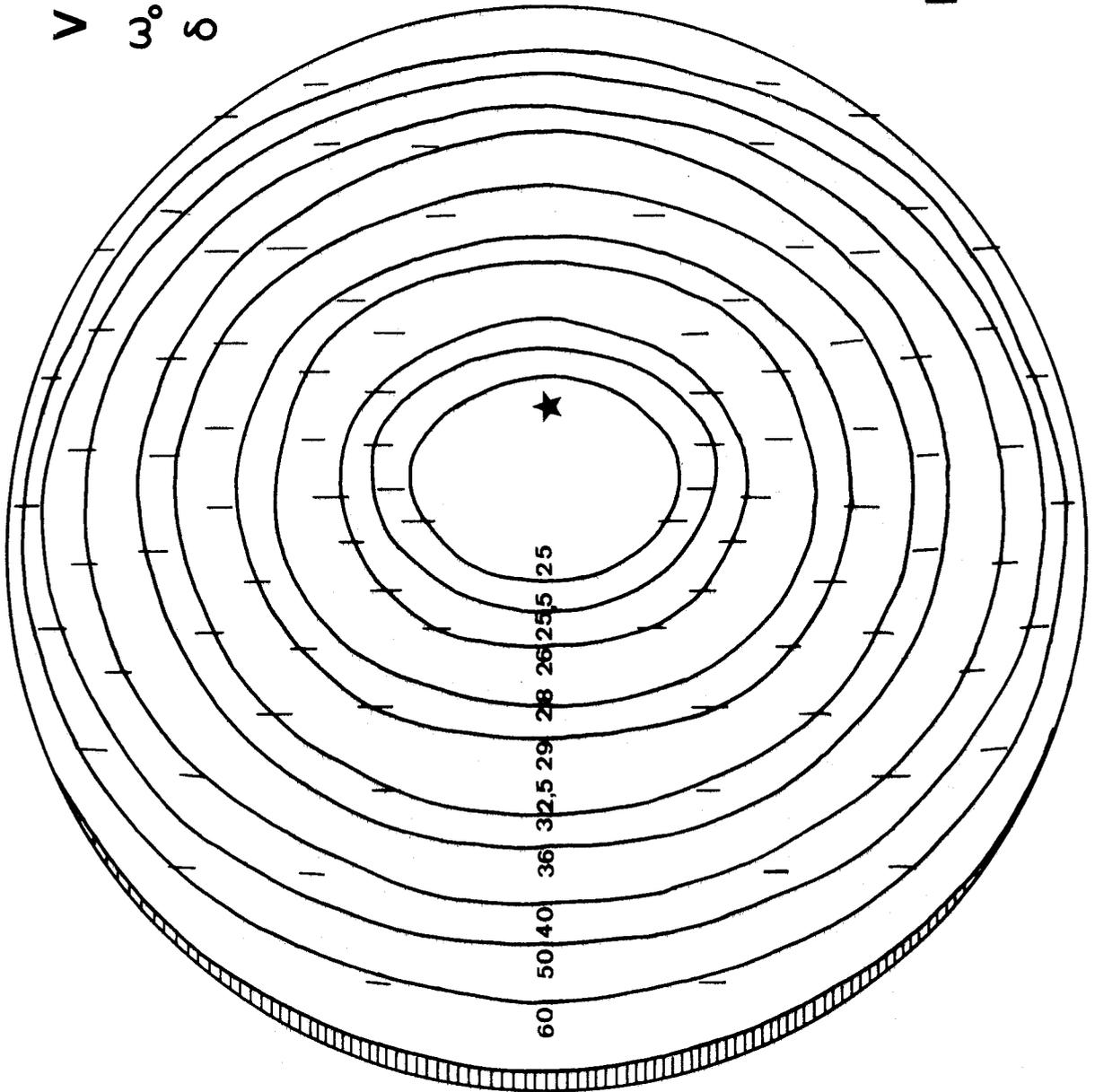


Fig V-5

$V = 25^\circ$
 $\omega_0 = 0,9995$
 $\delta = 0$

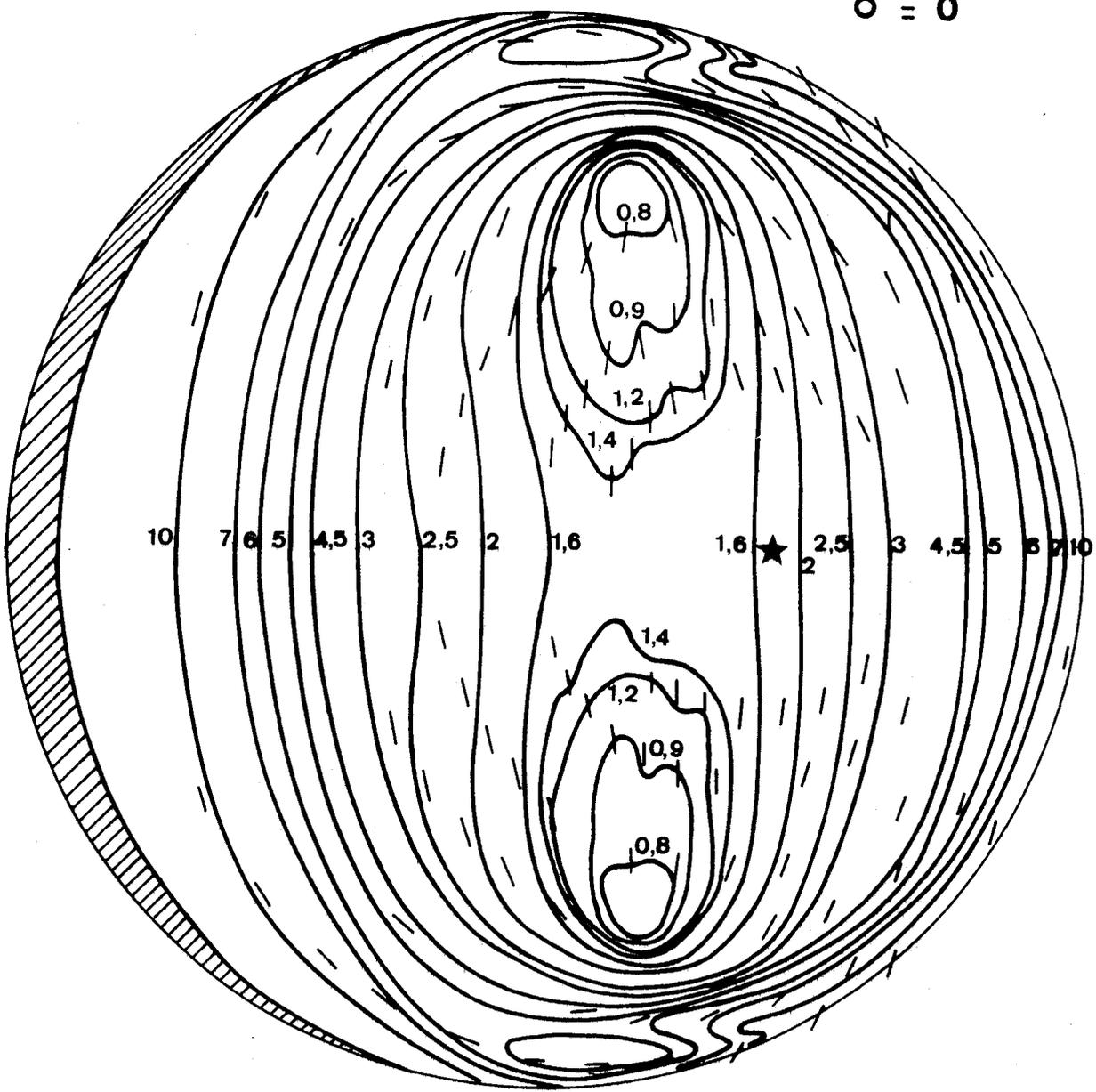


Fig V-6



$V = 45^\circ$

$\omega_0 = 0,9995$

$\delta = 0$

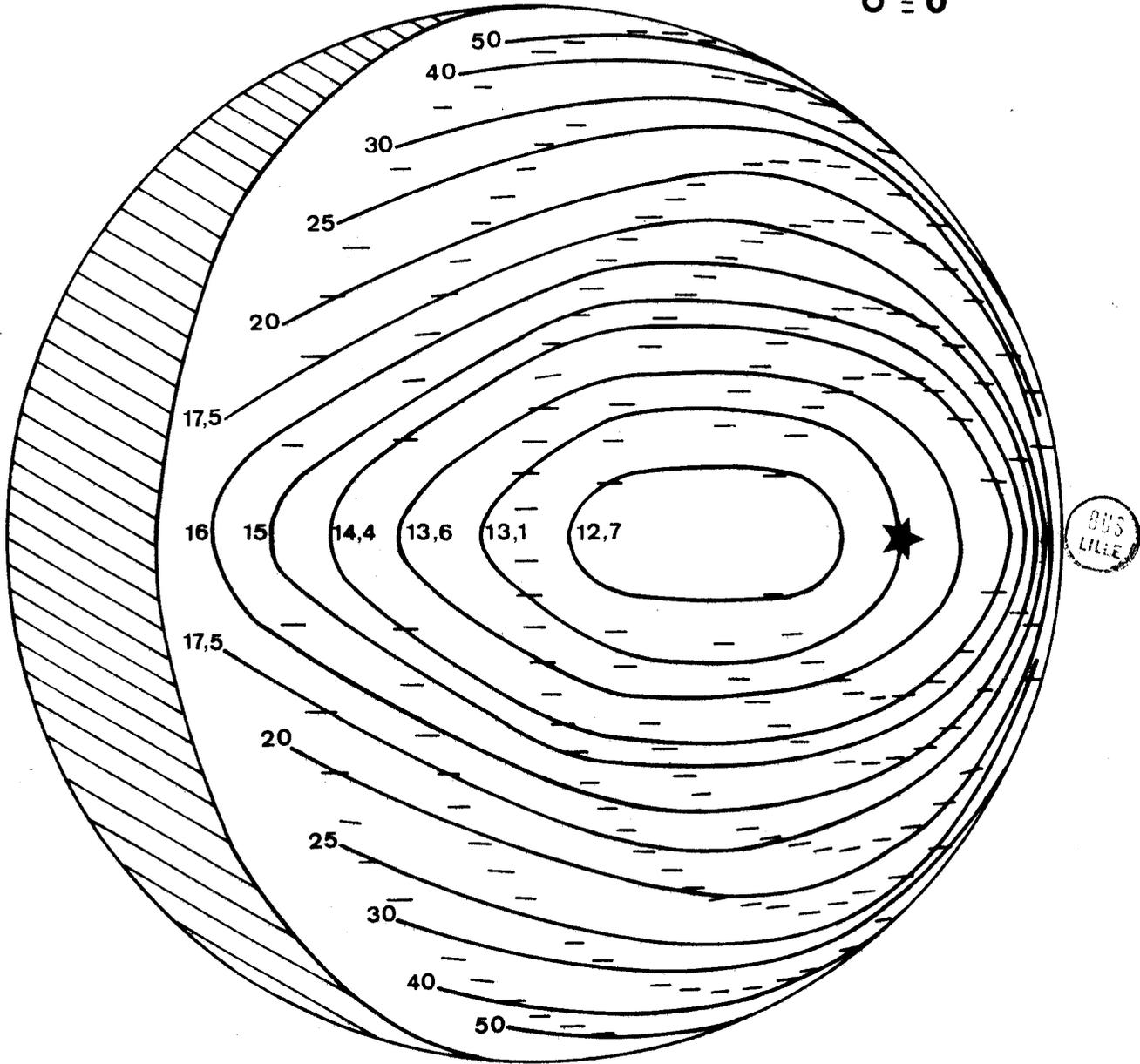


Fig V.7

$V = 65^\circ$
 $\omega_0 = 0,9995$
 $\delta = 0$

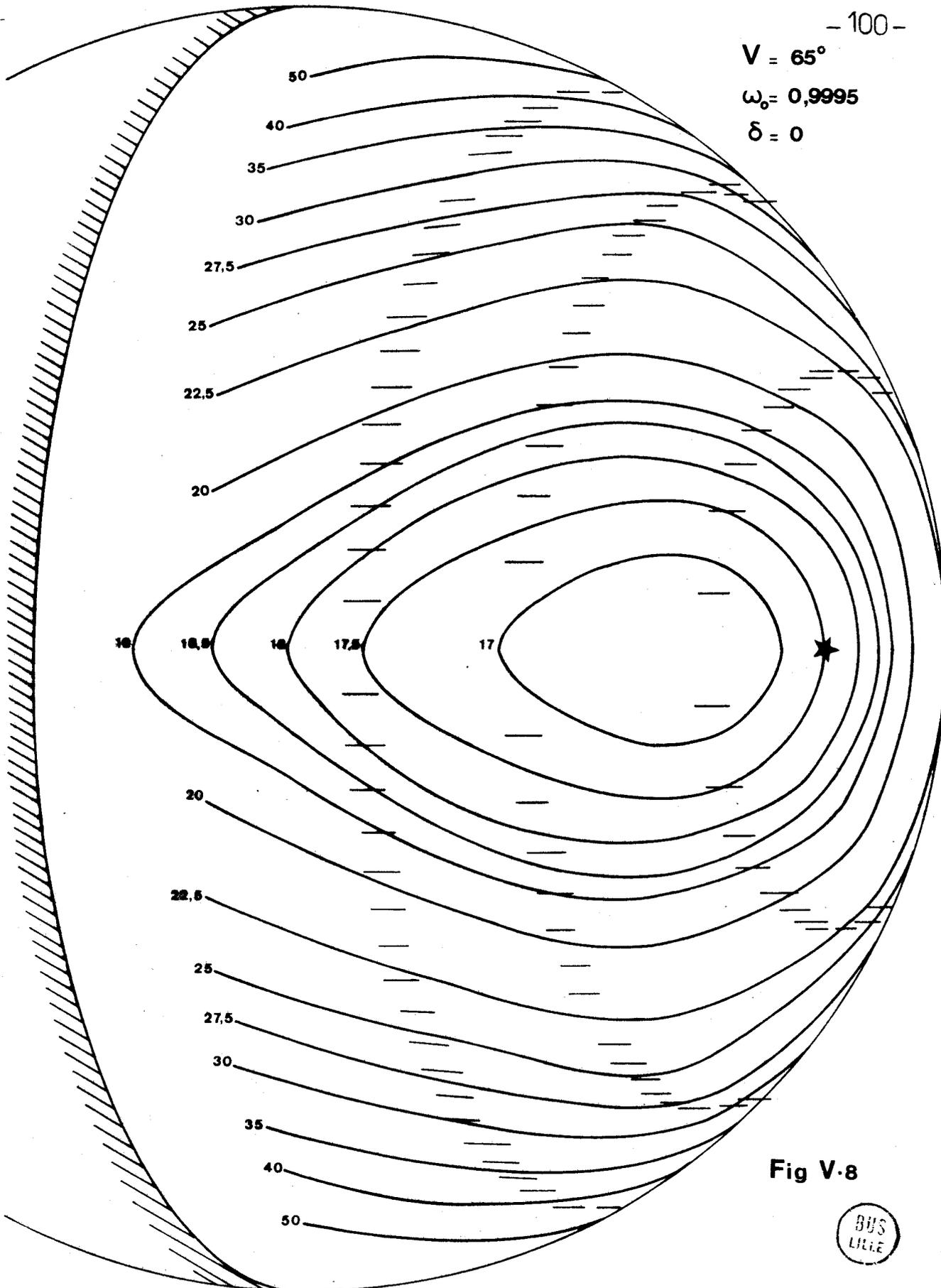


Fig V-8



$V = 75^\circ$
 $\omega_0 = 0,9995$
 $\delta = 0$

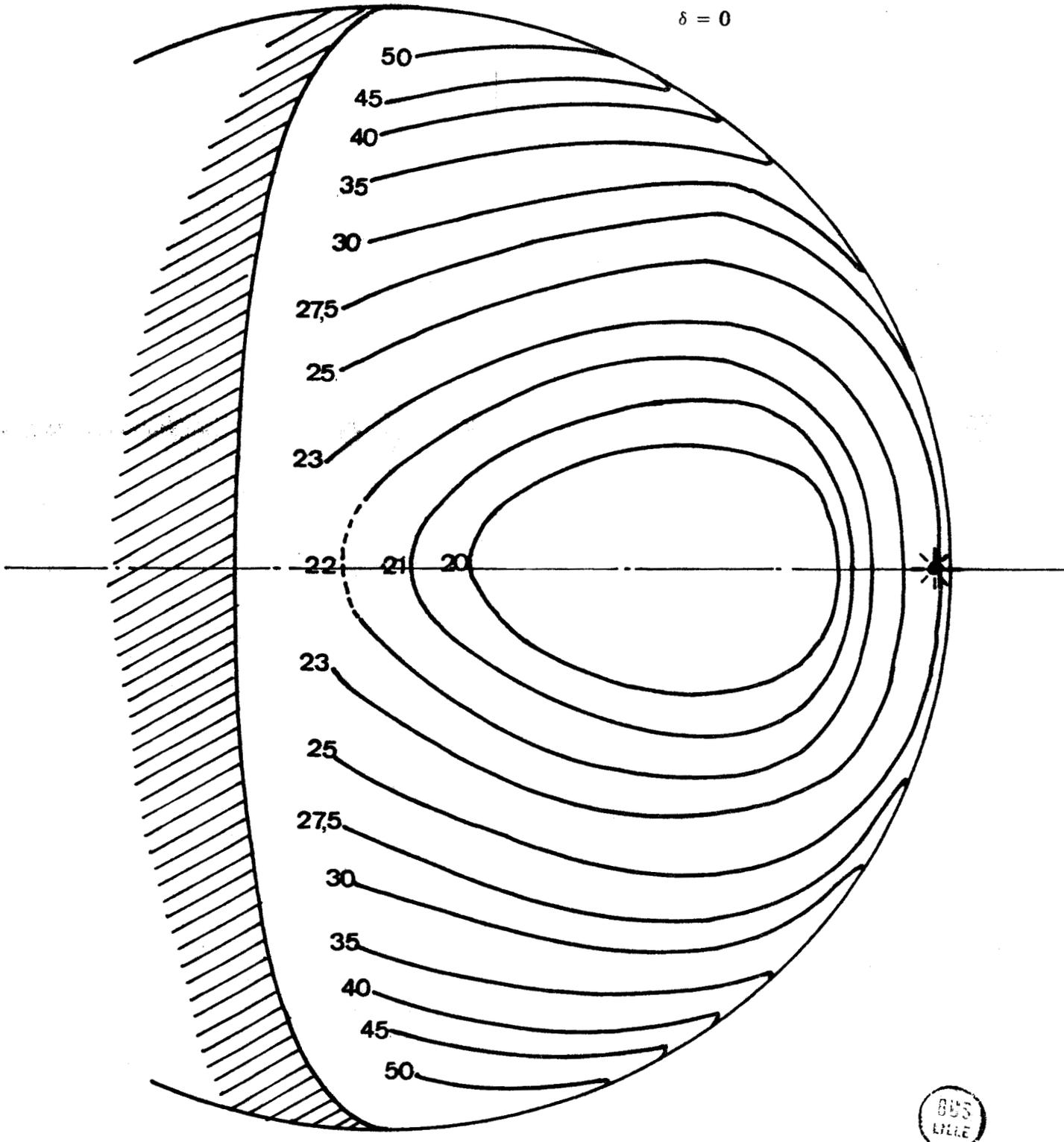


Figure V - 9

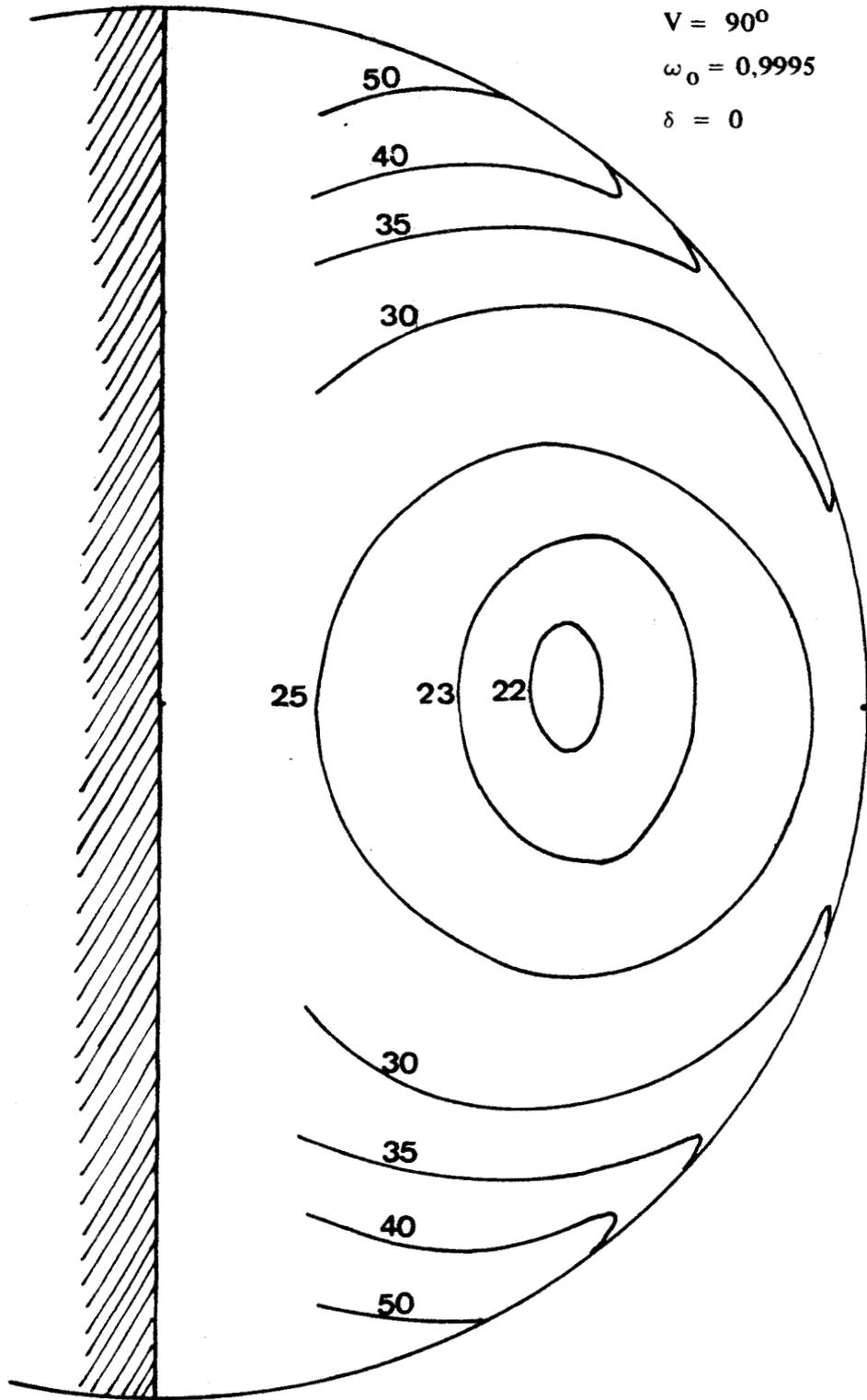


Figure V - 10

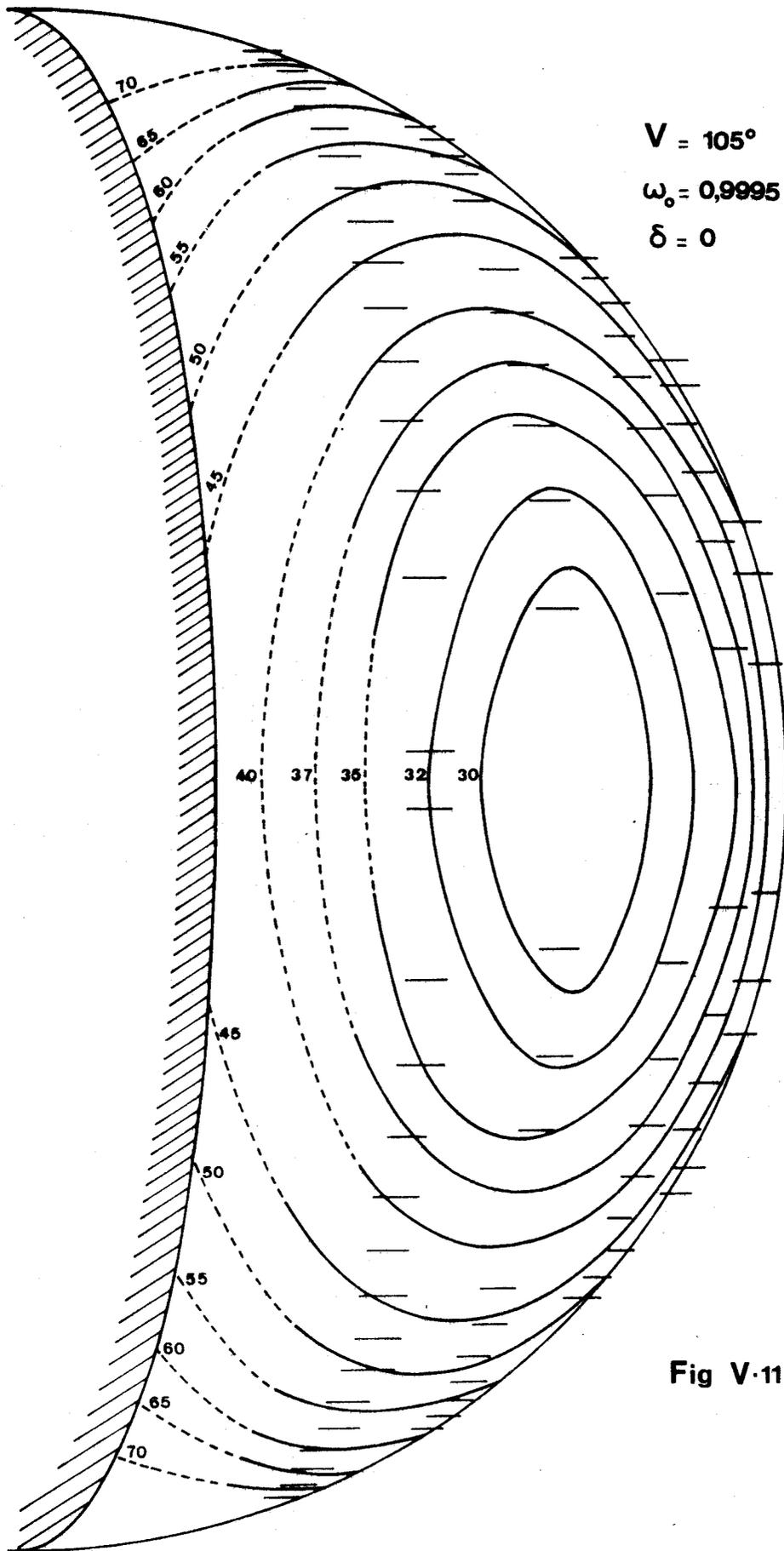


Fig V-11



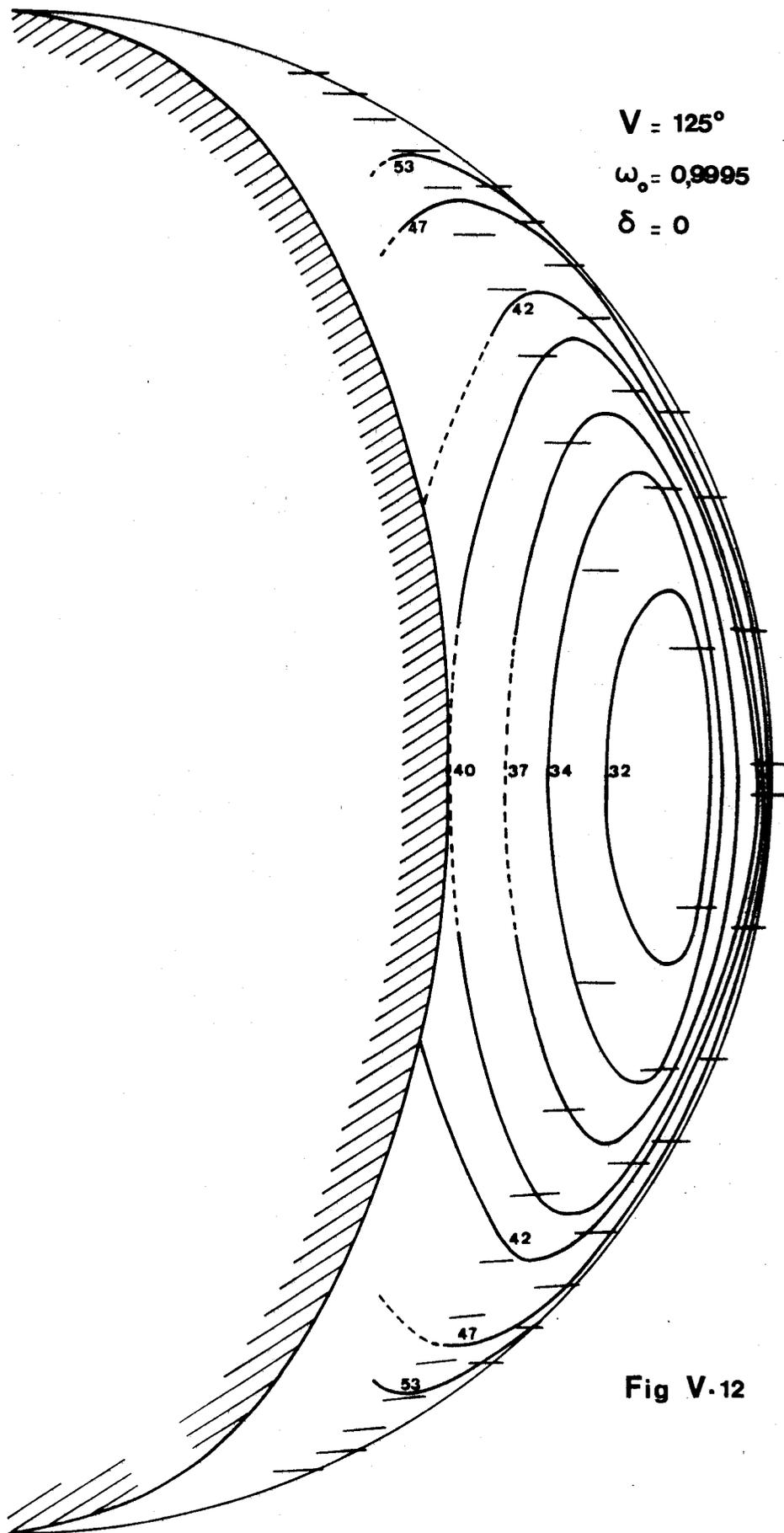


Fig V-12



$V = 25^\circ$
 $\omega_0 = 0,99999$
 $\delta = 0$

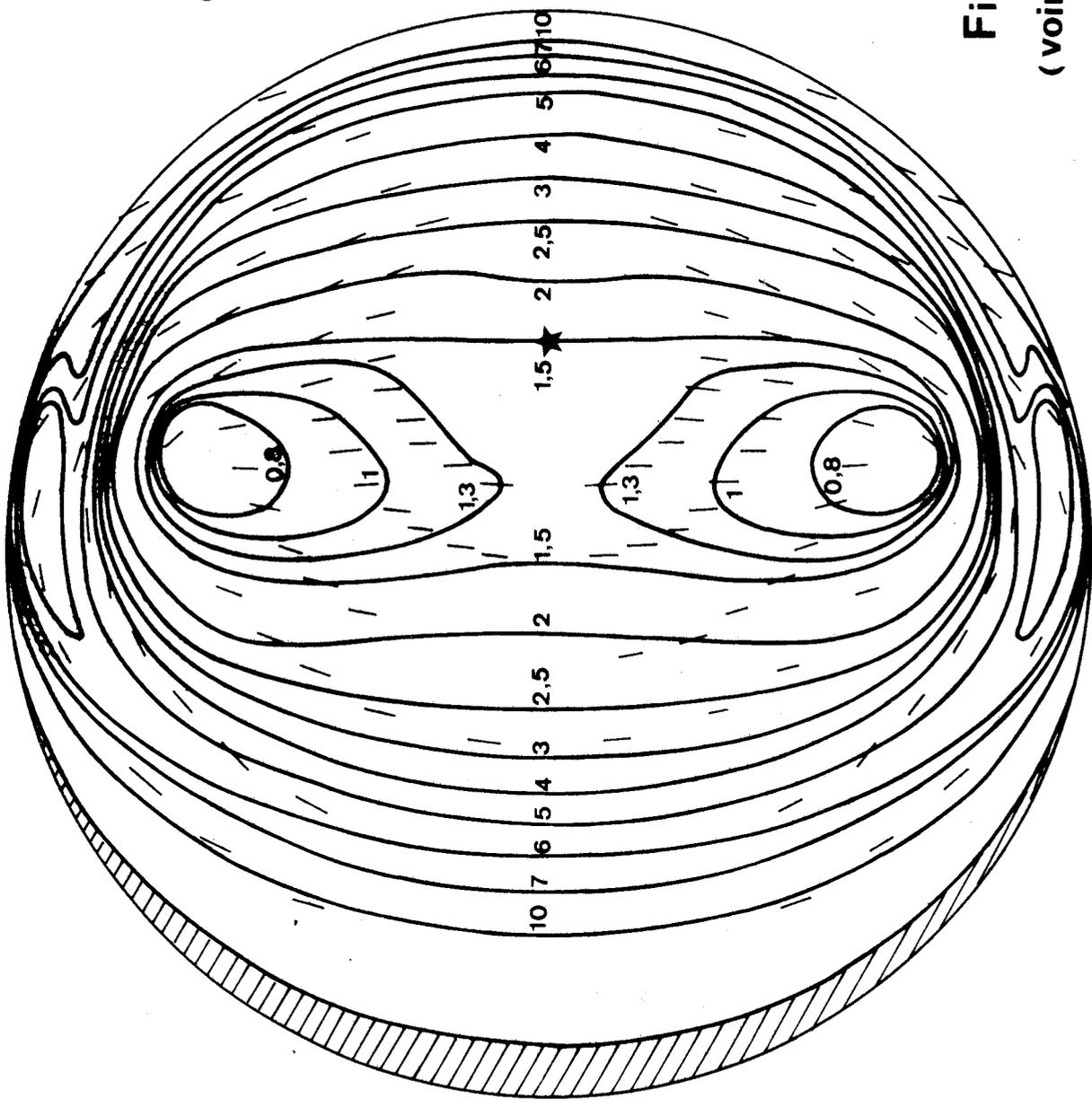


Fig V-13
(voir V.6)



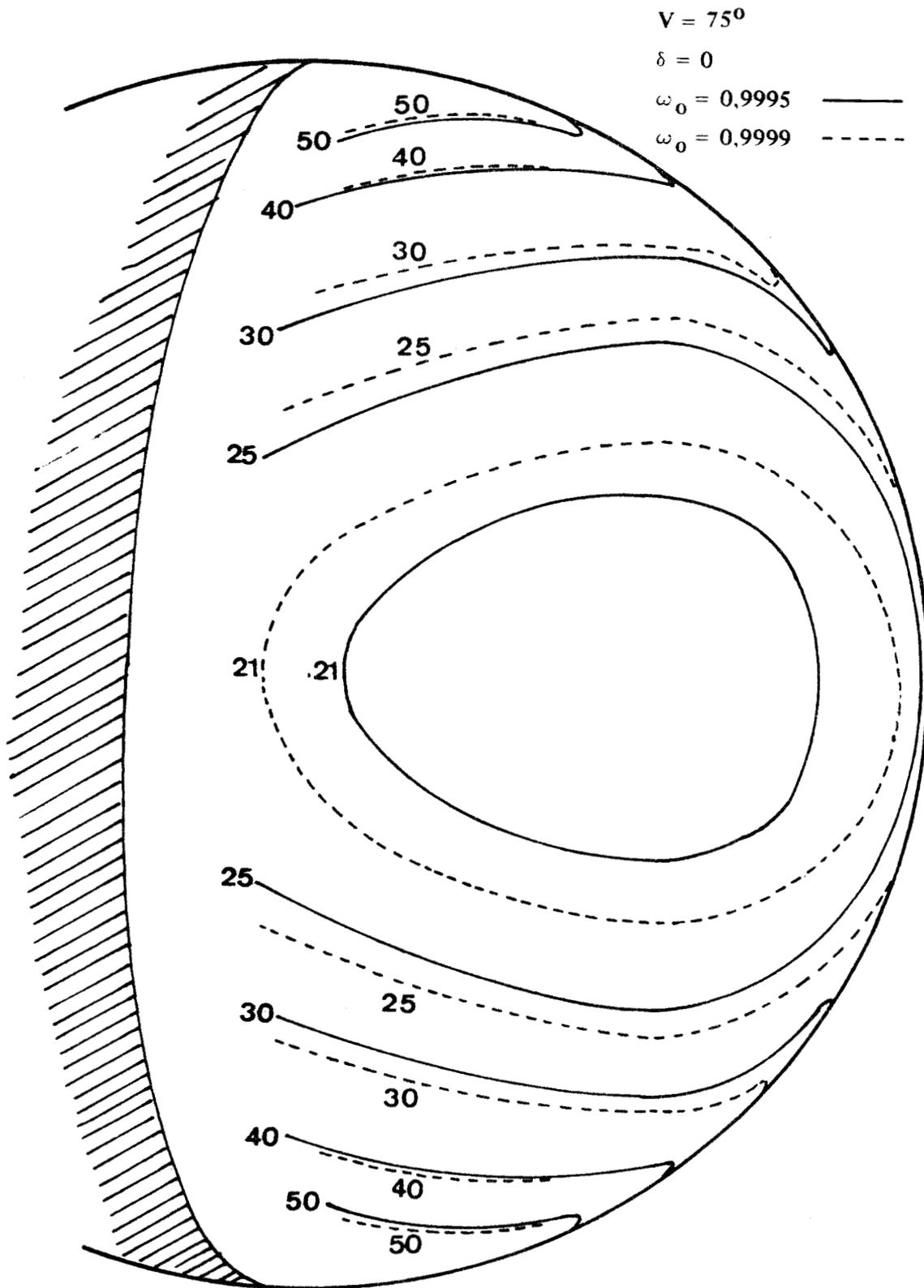


Figure V - 14



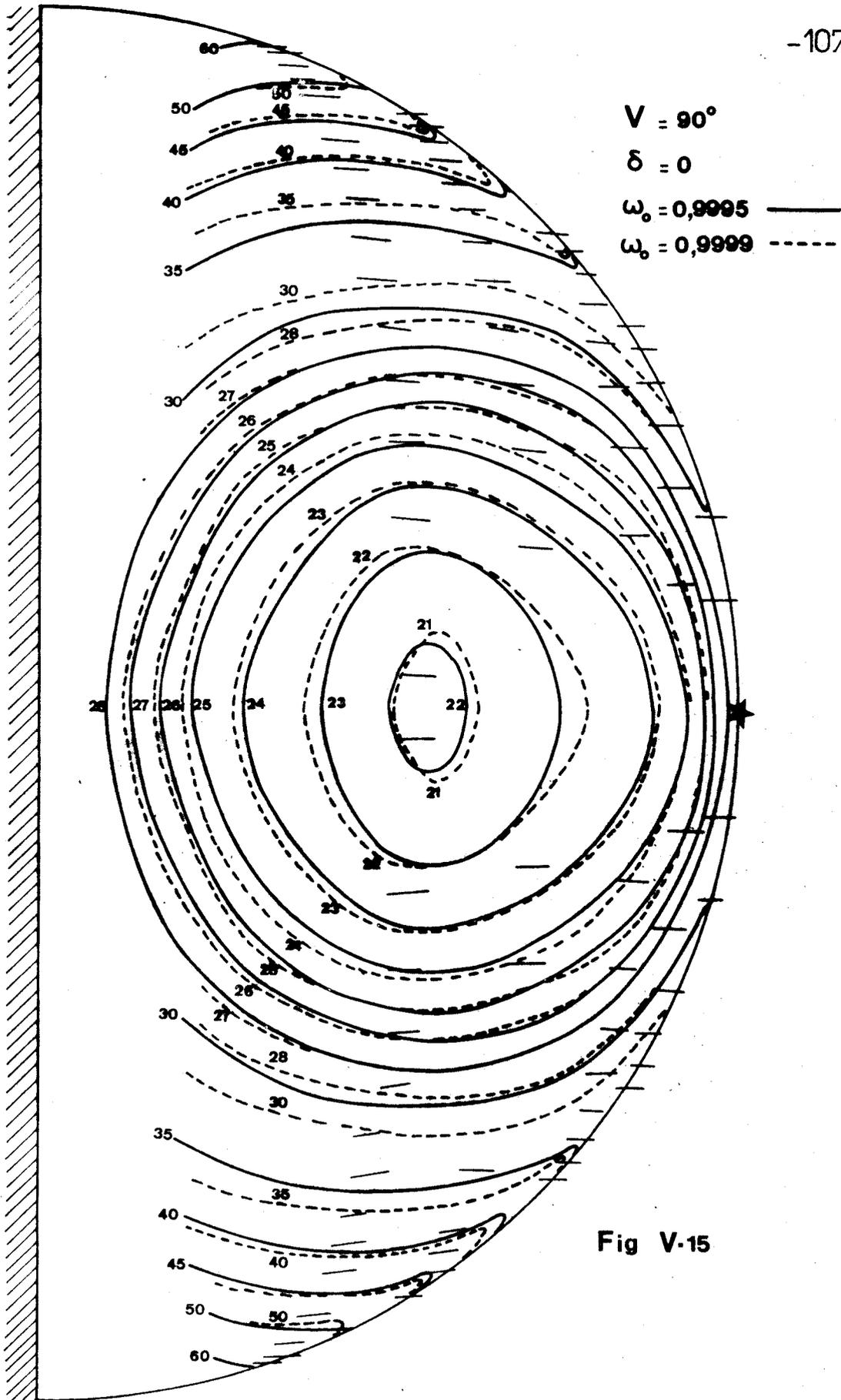


Fig V-15



$V = 25^\circ$
 $\omega_0 = 0,99999$
 $\delta = 0,01$

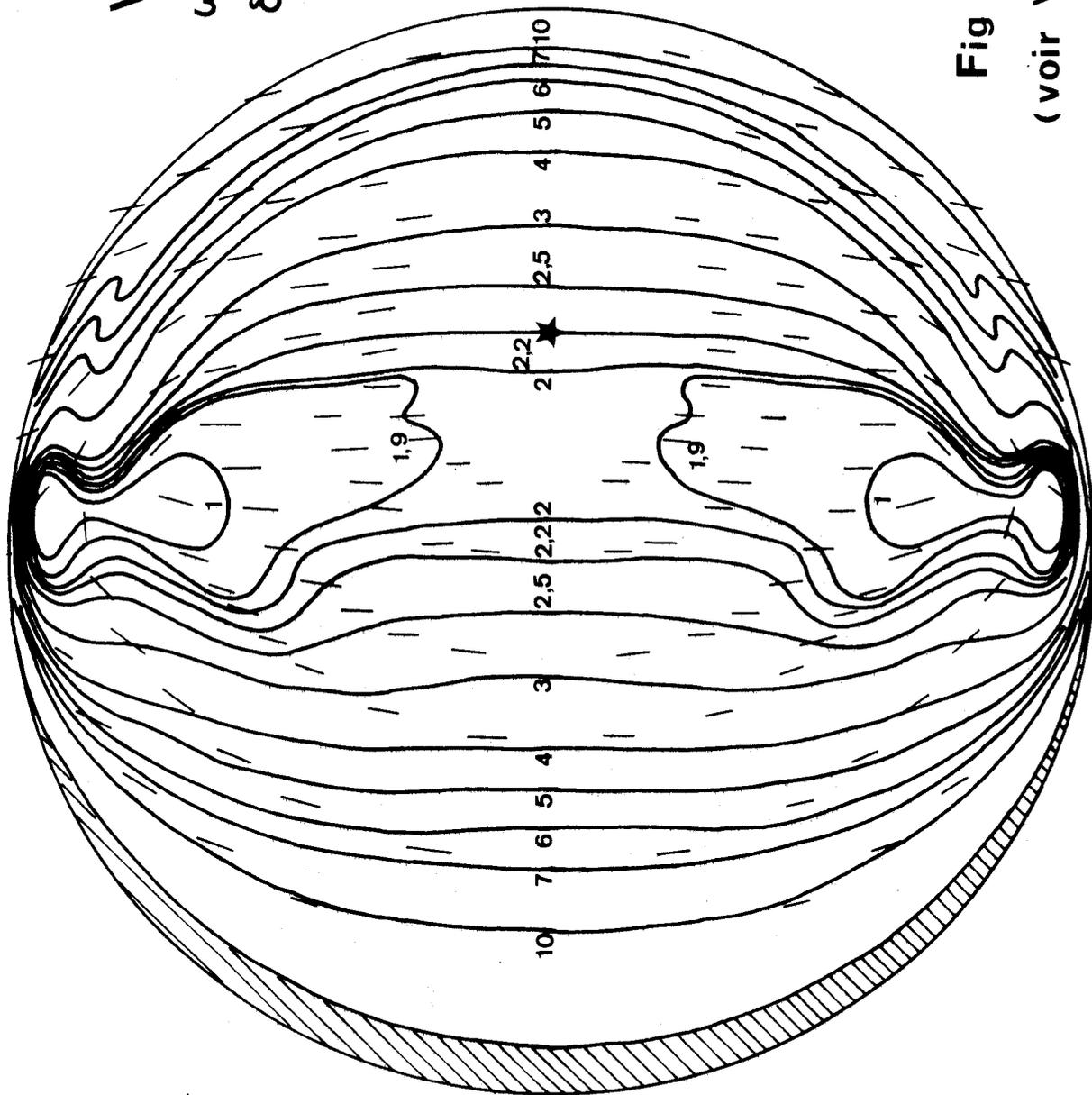


Fig V-16
(voir V.13)



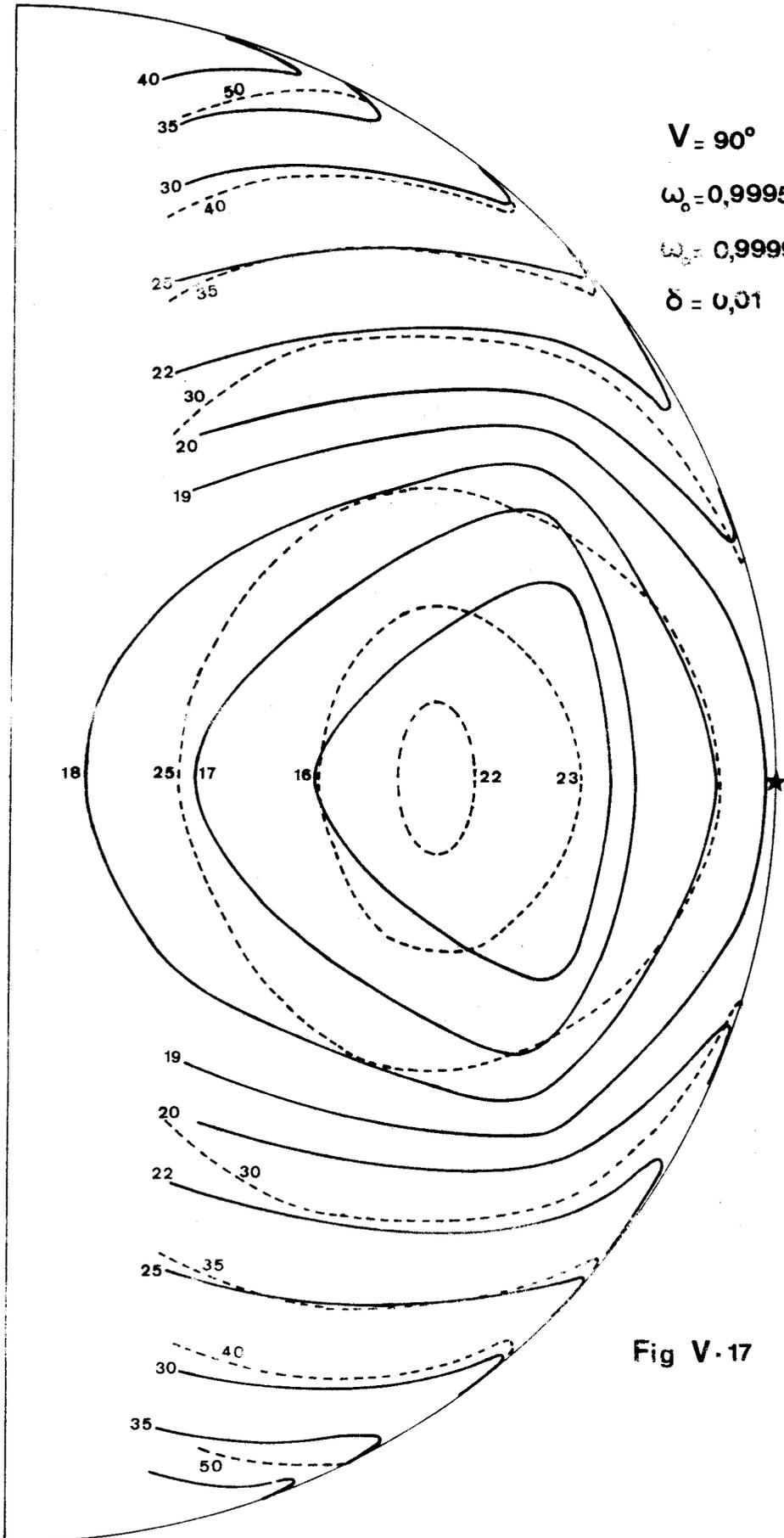


Fig V-17



$V = 125^\circ$

$\omega_0 = 0,9995$

$\delta = 0$

$\delta = 0,01$

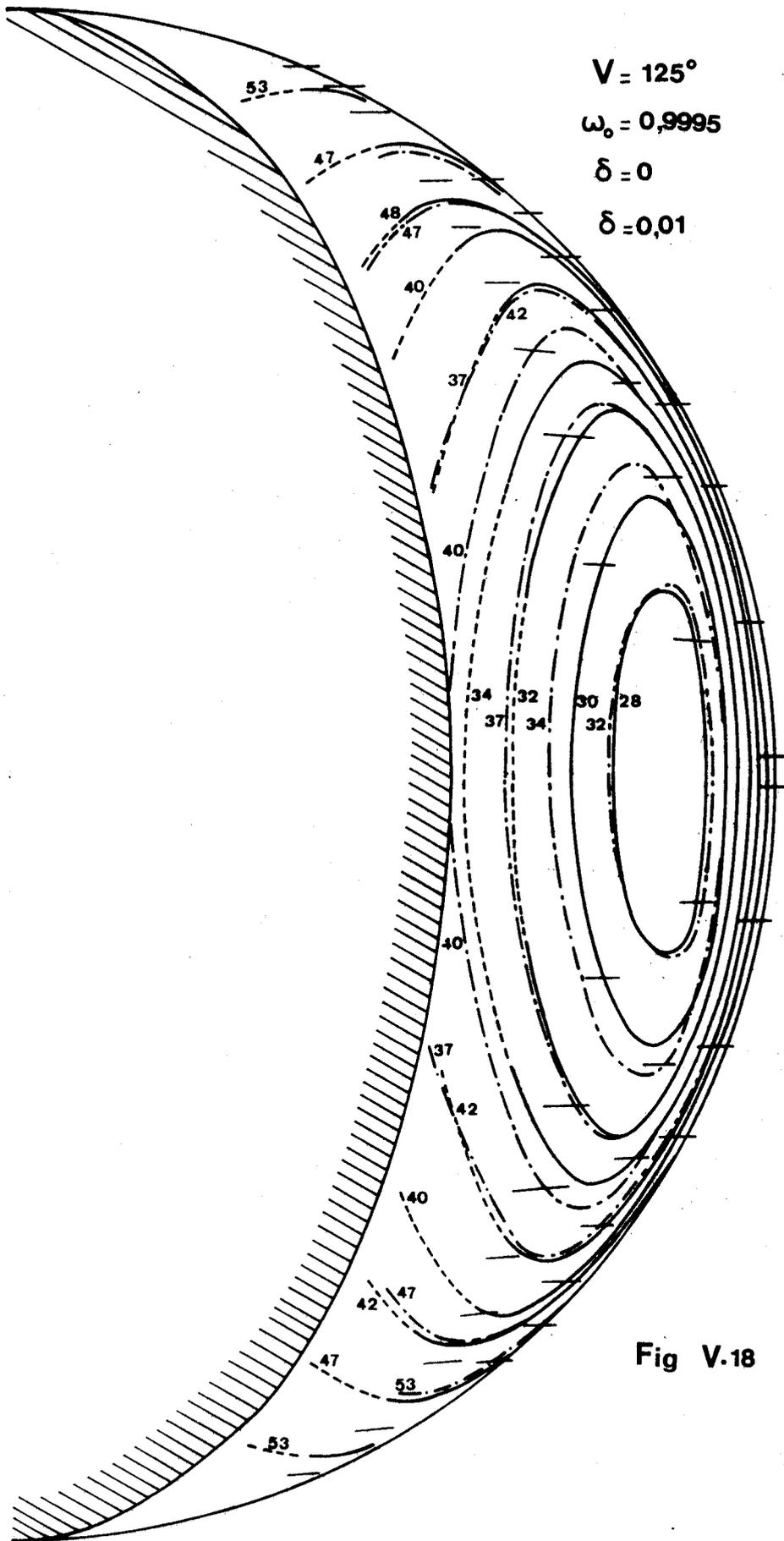


Fig V.18



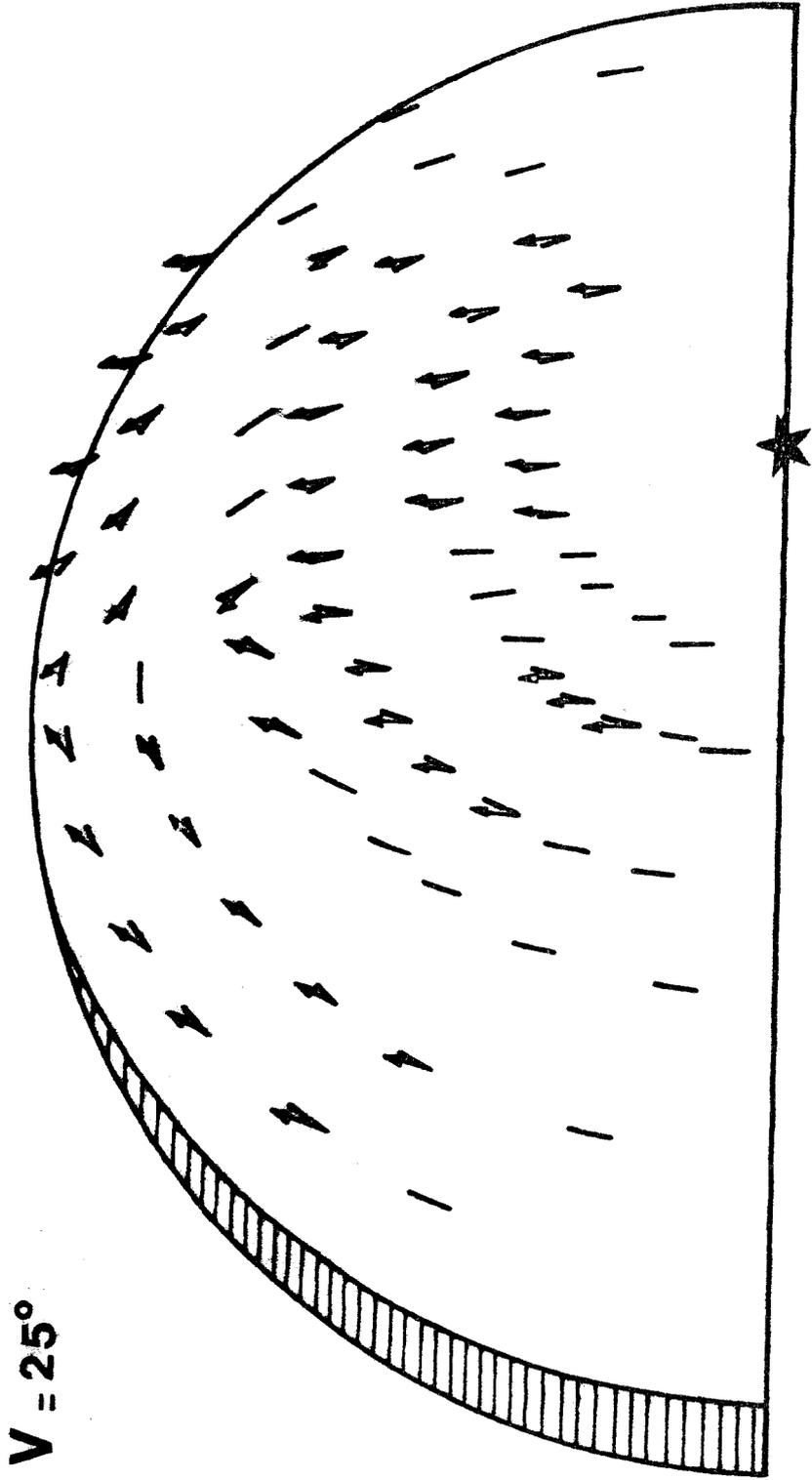


Fig V-19



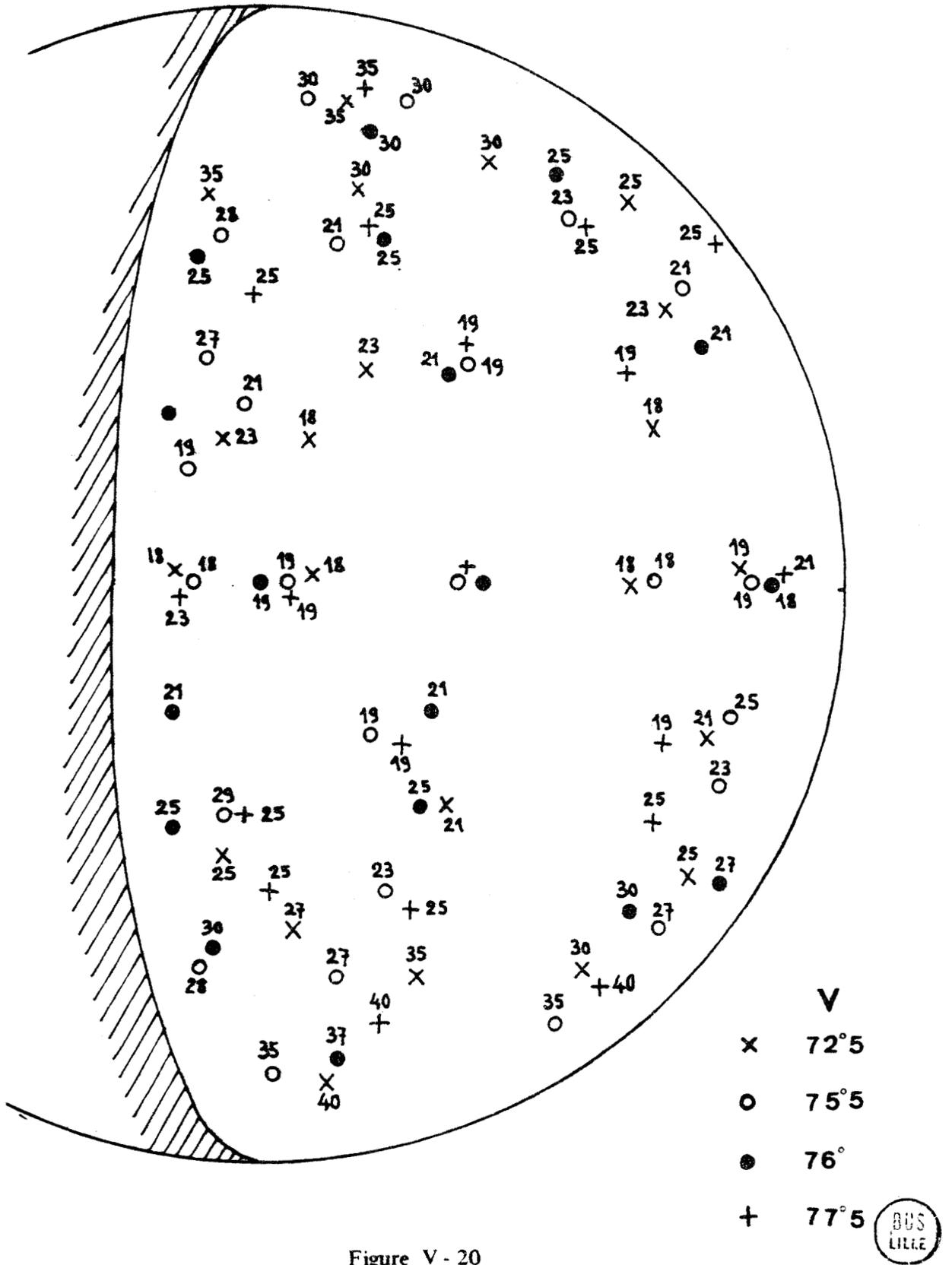


Figure V - 20

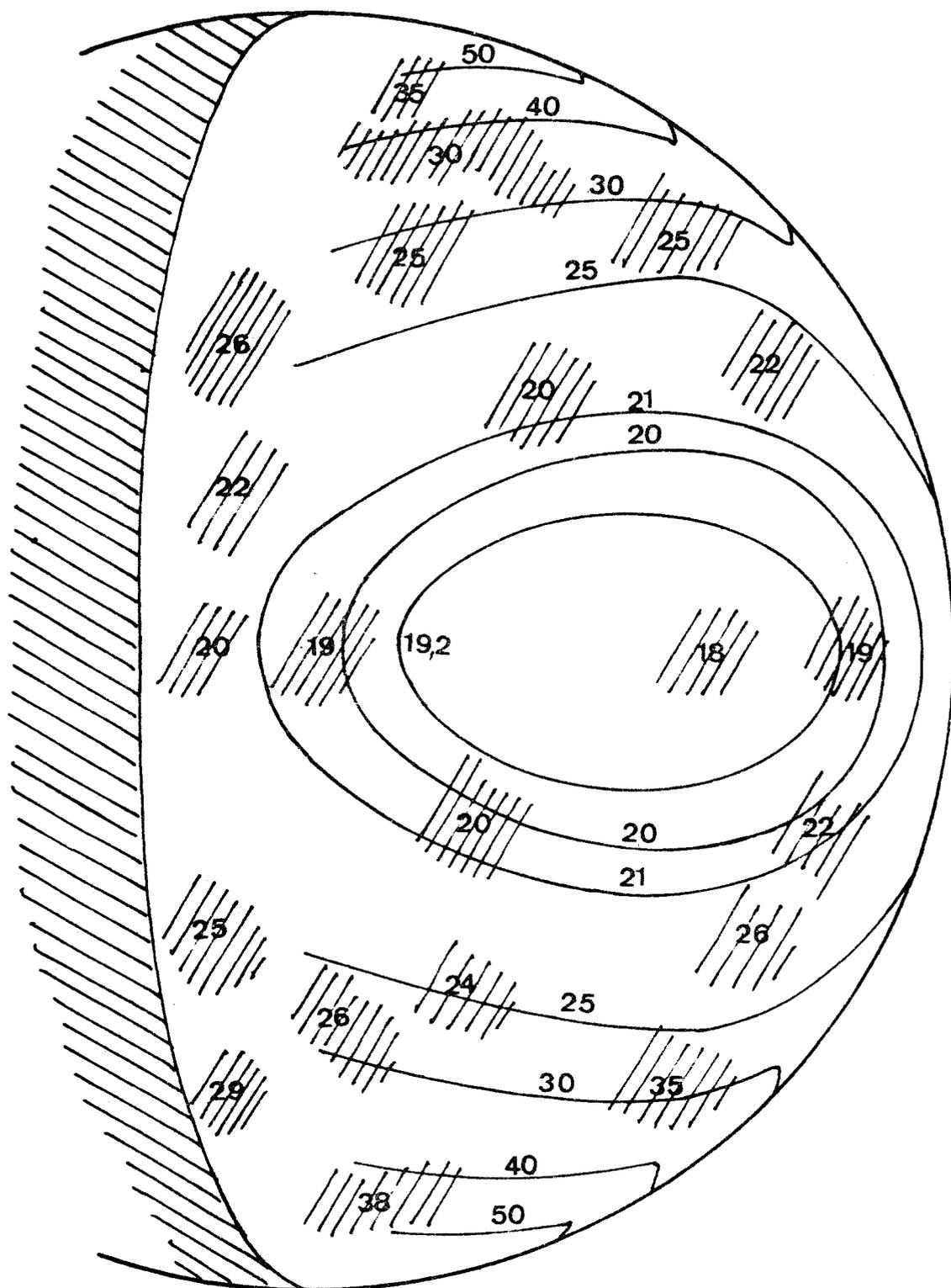


Figure V - 21

Comparaison avec les mesures expérimentales moyennées

Cas théorique : $V = 75^\circ$ $\omega_0 = 0.9999$ $\delta = 0$



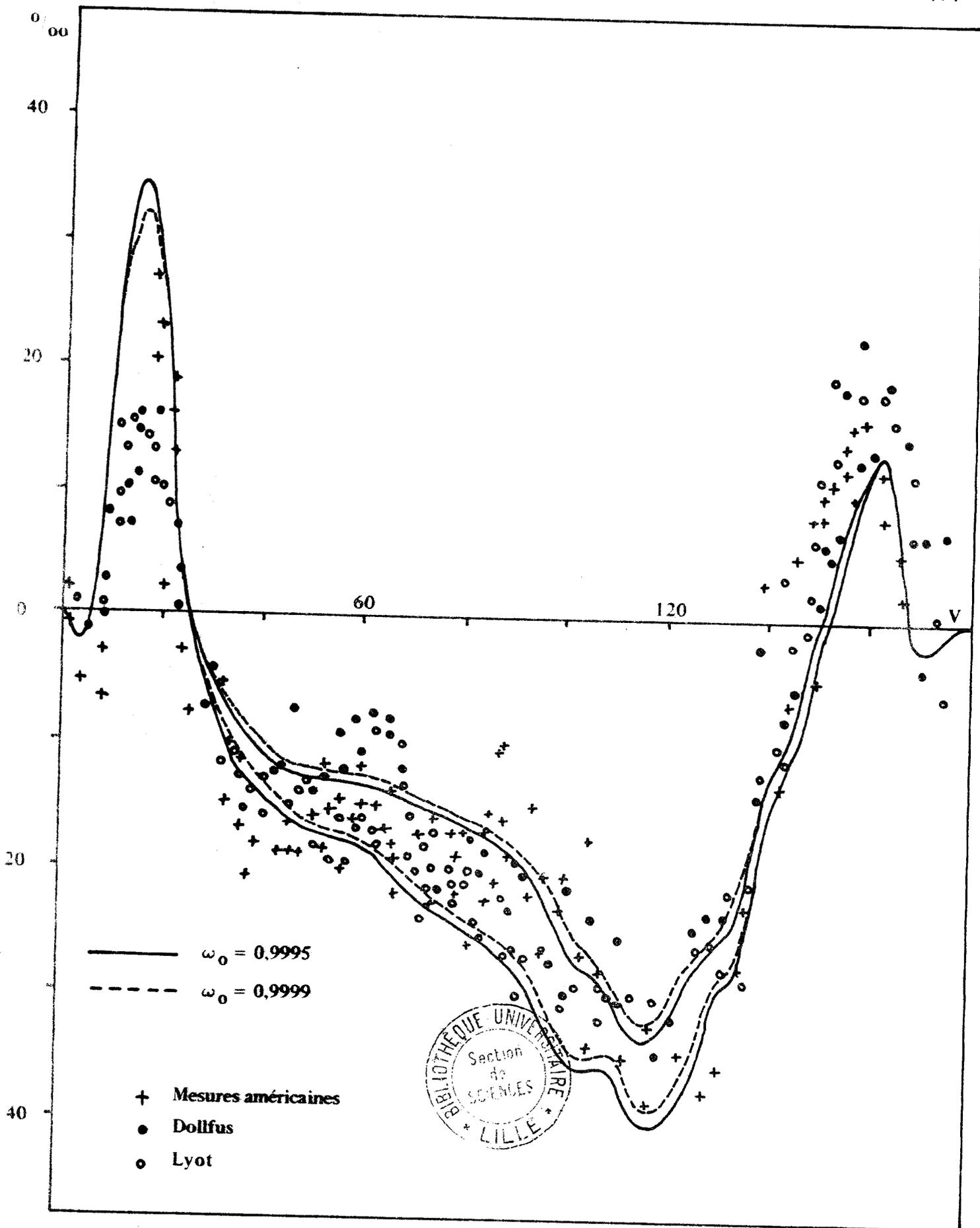


Figure V - 22

Taux de Polarisation intégré en fonction de l'angle de phase. δ : vaut zéro pour les deux courbes inférieures et 0.01 pour les supérieures.

